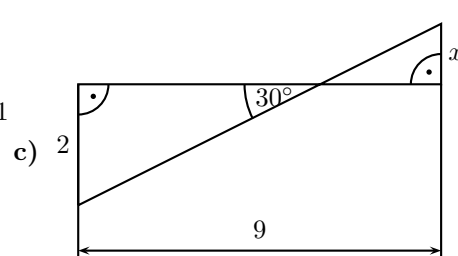
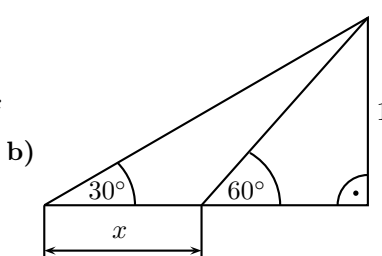
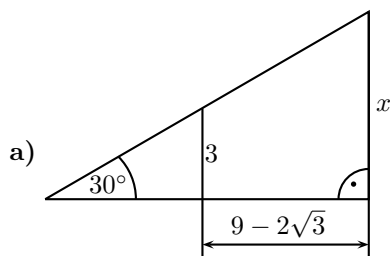
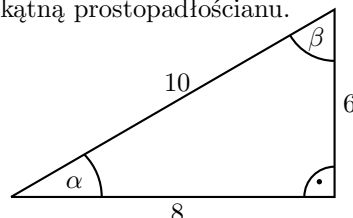


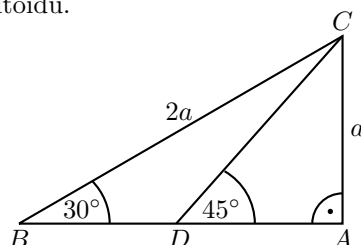
1. Wyznacz długości boków trójkąta prostokątnego  $ABC$  oraz wartości funkcji trygonometrycznych kąta  $\sphericalangle CAB$  mając dane  $\sin|\sphericalangle(CAB)| = \frac{4}{5}$  i  $|BC| = 2$ .
2. Rozwiąż trójkąt prostokątny mając dane przyprostokątne  $a = \sqrt{2} - 1$ ,  $b = \sqrt{6} - \sqrt{3}$ .
3. Oblicz  $x$ , gdy:



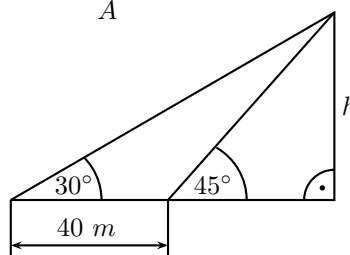
4. Oblicz długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego, jeśli  $\alpha$  jest jednym z dwóch kątów ostrych trójkąta oraz  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$  i długość przeciwprostokątnej równa jest 15 cm.
5. Wyznacz kąty trójkąta prostokątnego wiedząc, że:
  - a) iloczyn sinusa jednego kąta ostrego i cosinusa drugiego kąta ostrego wynosi  $\frac{1}{4}$ .
  - b) kwadrat odwrotności tangensa kąta ostrego wynosi 3.
6. W pewnym trójkącie prostokątnym suma cosinusów kątów ostrych jest równa  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ . Oblicz iloczyn sinusów tych kątów.
7. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego, w którym dana przyprostokątna jest dwa razy dłuższa od drugiej przyprostokątnej.
8. Dany jest prostopadłościan o krawędziach podstawy 1 dm, 2 dm i wysokości 30 cm. Podaj wartości funkcji trygonometrycznych kąta zawartego między przekątną podstawy a przekątną prostopadłościanu.
9. Korzystając z danych przedstawionych na rysunku, oblicz wartość wyrażenia:  $\operatorname{tg}^2 \beta - 5 \sin \beta \operatorname{ctg} \alpha + \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$ .
10. Turysta idzie prostą drogą wznoszącą się pod kątem  $5^\circ$ .
  - a) Jaką różnicę poziomów pokona po przejściu 0,5 km?
  - b) Jak długo musiałby iść tą drogą z szybkością 4,5 km/h, aby pokonać różnicę poziomów równą 130 m.
11. Przekątne deltoidu mają długości 20 cm i 30 cm. Punkt przecięcia przekątnych dzieli dłuższą z nich w stosunku 2 : 1. Oblicz miary kątów deltoidu.



12. Dany jest trójkąt  $ABC$ .
  - a) Oblicz wartość stosunku  $\frac{|AB|}{|CA|}$ .
  - b) Wyznacz wartości  $\frac{|BC|}{|CD|}$ .



13. Korzystając z danych na rysunku oblicz wysokość komina.



14. Wierzchołek latarni morskiej znajduje się 30 metrów nad poziomem morza. W kierunku latarni płynie ponton, z którego widać wierzchołek latarni pod kątem  $10^\circ$ . Po pewnym czasie ponton zbliżył się do latarni tak, że jej wierzchołek widać pod kątem  $35^\circ$ . Jaką odległość przebył ponton w tym czasie?
15. Pewnego dnia poziom wody  $y$  (w metrach) na ławicy piaskowej u wejścia do portu wyrażał się wzorem:  
 $y = 14 + 10\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)$ , gdzie  $t$  oznacza liczbę godzin jaka upłynęła od godziny  $12^{00}$ .  
 Oblicz poziom wody o godzinie  $14^{00}$ ,  $15^{00}$ ,  $16^{00}$ . O której godzinie tego dnia woda osiągnie najwyższy poziom?
16. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego  $\alpha$ , jeśli:
- $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{3}{10}$
  - $\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \frac{2}{5}$
  - $\sin\alpha = \frac{1}{3}$
  - $\operatorname{ctg}\alpha = 2,4$
17. Korzystając z tożsamości  $\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$  wyznacz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego, gdy  $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{7}$ .
18. Czy istnieje kąt  $\alpha$ , dla którego
- $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \wedge \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{2}$
  - $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2} \wedge \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
  - $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{5} - 2 \wedge \operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{5} + 2$
  - $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4} \wedge \sin\alpha = \frac{3}{5}$
  - $3\cos\alpha - 2 = 6$
  - $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \wedge \cos\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$
19. Wiedząc, że  $\alpha$  jest kątem ostrym i  $\operatorname{tg}\alpha = 2$ , oblicz wartość wyrażenia  $\frac{4\cos\alpha - \sin\alpha}{3\cos\alpha + 5\sin\alpha}$ .
20. Oblicz  $a - b$ , gdy  $a = \sin^4\alpha - \cos^4\alpha$ ,  $b = 1 - 4\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$  dla  $\alpha = 60^\circ$ .
21. **Test wyboru.** Zaznacz poprawne odpowiedzi.

a) Sinus kąta ostrego  $\alpha$  jest równy  $\frac{3}{5}$ . Wynika stąd, że:

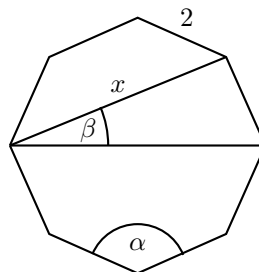
- $\cos\alpha = \frac{2}{5}$ .
- $\operatorname{tg}\alpha = 0,75$ .
- $\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \frac{4}{3}$ .

b) W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna ma długość 50 cm, a sinus jednego z kątów ostrych jest równy  $\frac{24}{25}$ . Zatem w tym trójkącie:

- obwód jest równy 112 cm.
- tangens jednego z kątów ostrych jest większy od 3.
- jedna z wysokości ma długość 13,44 cm.

c) W ośmiokącie foremnym o boku 2 (rysunek obok):

- $\alpha = 120^\circ$ .
- $x = 2 + \sqrt{2}$ .
- $\operatorname{tg}\beta = \sqrt{2} - 1$ .



d) Następujące równanie jest prawdziwe dla  $\alpha = 60^\circ$ .

- $\cos\alpha + \cos(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}-1}$
- $\sqrt{3}\sin\alpha - \frac{1}{2} = \operatorname{tg}45^\circ$
- $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha = 3 + \cos\alpha$

e) Wartość następującego wyrażenia jest równa 1.

- $\sin 40^\circ - \cos 50^\circ$
- $\frac{\sin 29^\circ}{\cos 61^\circ}$

$$(C) (\sin 20^\circ + \cos 20^\circ)(\sin 20^\circ - \cos 20^\circ) + 2\sin^2 70^\circ$$

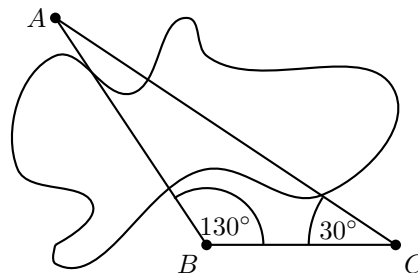
22. (R) Miary dwóch kątów trójkąta wynoszą  $\frac{\pi}{6}$  i  $\frac{\pi}{5}$ . Oblicz miarę trzeciego kąta. Odpowiedź podaj w stopniach.
23. (R) Naszkicuj w układzie współrzędnych kąt  $\alpha$  taki, że
- a)  $\sin \alpha = -\frac{1}{3} \wedge \alpha \in \langle 270^\circ, 360^\circ \rangle$
  - b)  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$
  - c)  $\operatorname{tg} \alpha = 2 \wedge \alpha \in \langle 180^\circ, 270^\circ \rangle$
  - d)  $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{5}{3}$
24. (R) Wiedząc, że  $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ ,  $\sin \alpha < 0$  oraz  $4\operatorname{tg} \alpha = 3\sin^2 \alpha + 3\cos^2 \alpha$
- a) oblicz  $\operatorname{tg} \alpha$ ,
  - b) zaznacz w układzie współrzędnych kąt  $\alpha$  i podaj współrzędne dowolnego punktu, różnego od początku układu współrzędnych, który leży na końcowym ramieniu tego kąta.
25. (R) Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta:
- a)  $\beta = 120^\circ$
  - b)  $\beta = 210^\circ$
  - c)  $\beta = 315^\circ$
26. (R) Oblicz:
- a)  $\sin 765^\circ$
  - b)  $\cos 1200^\circ$
  - c)  $\sin(-1710^\circ)$
  - d)  $\operatorname{tg}(-750^\circ)$
  - e)  $\cos(-450^\circ)$
  - f)  $\operatorname{ctg}(-1395^\circ)$
  - g)  $\sin(-7\pi)$
  - h)  $\cos \frac{15}{2}\pi$
  - i)  $\operatorname{ctg}(-\frac{23}{4}\pi)$
  - j)  $\operatorname{tg} \frac{13}{3}\pi$
  - k)  $2\sin 150^\circ - 3\cos 120^\circ + \operatorname{tg} 135^\circ$
27. (R) Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta  $x$ , gdy:
- a)  $\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{5} \wedge x \in (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$
  - b)  $\operatorname{tg} x = -3 \wedge x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$
  - c)  $\cos x = \frac{2}{3}$
28. (R) Miary pięciu kątów tworzą ciąg arytmetyczny. Drugim wyrazem tego ciągu jest  $150^\circ$  a czwartym  $270^\circ$ . Oblicz sumę sinusów tych pięciu kątów.
29. (R) Oblicz wartość wyrażenia  $\frac{\sin x + \cos x}{2\sin x - 3\cos x}$ , dla  $\operatorname{tg} x = 2$ .
30. (R) Wykaż, że wyrażenie  $\frac{-\cos 2x}{\sin x \cdot \cos x} = \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x}$  nie jest tożsamością.
31. (R) Sprawdź, czy podana równość jest tożsamością trygonometryczną:
- a)  $1 - (\cos \alpha - \sin \alpha)^2 = 2\sin \alpha \cos \alpha$
  - b)  $\frac{\cos^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \left( \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} \right)^{-1}$
  - c)  $\cos \alpha \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = -1$  dla  $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$
  - d)  $\frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}$ , dla  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , gdzie  $k \in \mathbb{C}$ .
32. (R) Rozwiąż równanie:
- a)  $\cos 3x = \sin \frac{5}{6}\pi$
  - b)  $\operatorname{tg} x = \sin x$ , gdy  $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
  - c)  $\sqrt{3}\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}x) = 1$
  - d)  $\operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ , gdzie  $x \in (-\pi, 0)$
  - e)  $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

33. (R) a) Oblicz wartość wyrażenia  $\sin 2x$ , jeśli  $\operatorname{ctg} x = 5 \wedge x \in (0, \frac{\pi}{2})$ .  
b) Sprawdź, czy  $\operatorname{ctg} 10^\circ - \operatorname{ctg} 20^\circ = \frac{1}{\sin 20^\circ}$ .  
c) Na podstawie wzoru:  $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha$ , oblicz:  $\sin 75^\circ$ .  
d) Oblicz  $\sin\alpha + \cos\alpha$ , gdy  $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 0,5$ .
34. (R) Dla jakich wartości parametru:  
a)  $m$  równanie  $3\cos x - 2 = m$  ma rozwiązanie;  
b)  $a$  istnieje rozwiązanie równania  $\sin x = 2a - 3$ ;  
c) Dane jest równanie  $\sin x = a^2 + 1$ , z niewiadomą  $x$ . Wyznacz wszystkie wartości parametru  $a$ , dla których dane równanie nie ma rozwiązań.  
d) Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których równanie  $(\sin^2 x - \cos^2 x)^2 + m^2 - 5 = 0$  z niewiadomą  $x$  ma rozwiązanie.
35. (R) Dana jest funkcja  $f$  o wzorze  $f(x) = \cos 2x + 4\cos x + 3$ .  
a) Oblicz  $f(\pi)$ .  
b) Wyznacz zbiór miejsc zerowych funkcji  $f$ .
36. (R) Wyznacz największą ujemną liczbę spełniającą równanie  $\cos(x + \frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$ .
37. (R) Zbiór  $A$  jest zbiorem rozwiązań równania  $\cos 3x = \cos x$  w zbiorze liczb rzeczywistych, zaś  $B$  zbiorem rozwiązań równania  $\sin 4x = 0$  w przedziale  $x \in (0, 2\pi)$ . Wyznacz iloczyn zbiorów  $A$  i  $B$ .
38. (R) a) Rozwiąż równanie:  $1 + \cos 2x = \cos x$ .  
b) Podaj współrzędne punktów przecięcia się wykresów funkcji  $y = \sin x$  i  $y = \cos 2x$  w przedziale  $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ .  
c) Rozwiąż równanie  $2\cos^2 x = \sin x - 1$ .  
d) Rozwiąż równanie  $\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\sin 4x}$  w przedziale  $\langle -\pi, \pi \rangle$ .
39. (R) Wyznacz wszystkie rozwiązania równania  $2\cos 2x = \cos x$  należące do przedziału  $\langle 0, 2 \rangle$ .
40. (R) Dane jest równanie postaci  $(\cos x - 1) \cdot (\cos x + p + 1) = 0$ , gdzie  $p \in \mathbb{R}$  jest parametrem.  
a) Dla  $p = -1$  wypisz wszystkie rozwiązania tego równania należące do przedziału  $\langle 0; 5 \rangle$ .  
b) Wyznacz wszystkie wartości parametru  $p$ , dla których dane równanie ma w przedziale  $\langle -\pi; \pi \rangle$  trzy różne rozwiązania.
41. (R) Dana jest funkcja  $f$  określona wzorem  $f(x) = \frac{\sin^2 x - |\sin x|}{\sin x}$  dla  $x \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ .  
a) Naskicuj wykres funkcji  $f$ .  
b) Wyznacz miejsca zerowe funkcji  $f$ .
42. (R) a) Naskicuj wykres funkcji  $y = \sin 2x$  w przedziale  $\langle -2\pi, 2\pi \rangle$ .  
b) Naskicuj wykres funkcji  $y = \frac{|\sin 2x|}{\sin 2x}$  w przedziale  $\langle -2\pi, 2\pi \rangle$  i zapisz, dla których liczb z tego przedziału spełniona jest nierówność  $\frac{|\sin 2x|}{\sin 2x} < 0$ .
43. (R) Naskicuj wykres funkcji  $f$  i odczytaj z niego jego miejsca zerowe i zbiór wartości:  
a)  $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{2})$   
b)  $f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{3})$   
c)  $f(x) = \operatorname{ctg}(x - \frac{\pi}{6})$   
d) Naskicuj dla  $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$  wykres funkcji  $y = |\cos x|$ .  
e) Naskicuj wykres funkcji  $f(x) = -2\sin x \cos x$  dla  $x \in (-\pi, \pi)$ , podaj jej miejsca zerowe i przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości dodatnie.  
f) Wyznacz okres zasadniczy funkcji i sporządź jej wykres  $g(x) = \sin x + \cos x$ .
44. (R) a) Wyznacz wszystkie liczby z przedziału  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , które spełniają nierówność  $\operatorname{tg} x > -1$ .  
b) Rozwiąż nierówność  $\cos x \leq 0,5$  w przedziale  $\langle 0, 2\pi \rangle$ .  
c) Odczytaj z wykresu funkcji, dla jakich wartości argumentu  $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$  spełniona jest nierówność  $\sin x > -\frac{1}{2}$ .  
d) Rozwiąż nierówność  $\operatorname{ctg} x \geq 1$ .

## Funkcje trygonometryczne

mgr A. Piłat, mgr M. Małycha

45. (R) Obiekty  $A$  i  $B$  leżą po dwóch stronach jeziora. W terenie dokonano pomiarów odpowiednich kątów i ich wyniki przedstawiono na rysunku. Odległość między obiektami  $B$  i  $C$  jest równa 400 m. Oblicz odległość w linii prostej między obiektami  $A$  i  $B$  i podaj wynik, zaokrąglając go do jednego metra.



46. (R) Dany jest trójkąt o bokach długości 1,  $\frac{3}{2}$ , 2. Oblicz cosinus i sinus kąta leżącego naprzeciw najkrótszego boku tego trójkąta.
47. (RR) Wyznacz pochodną funkcji  $y = \frac{x}{1-\cos x}$ .
48. (RR) Zbadaj monotoniczność funkcji określonej wzorem  $f(x) = 5x + \cos 4x$ .
49. (RR) **a)** Zbadaj, czy istnieje styczna do krzywej o równaniu  $y = \frac{1}{4}\sin 2x$  równoległa do prostej o równaniu  $y = -x$ .
- b)** Wyznacz współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji  $f(x) = \cos^2 2x$  w punkcie  $M = (x_0, f(x_0))$  jeśli  $x_0 = \frac{3}{8}\pi$ .