1 „Krok po kroku”

1.1. **a)** Podnosząc liczbę dodatnią $3-\sqrt{5}$ do kwadratu otrzymamy

$$(3-\sqrt{5})^2 = 14 - 6\sqrt{5}.$$

Stąd otrzymujemy ciekawą równość

$$\sqrt{14-6\sqrt{5}} = 3-\sqrt{5}.$$

Zaproponuj analogiczną rowność dotyczącą liczby $\sqrt{11+4\sqrt{7}}$. Uzasadnij zaproponowaną równość.
b) Pokażemy, że liczby $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ i $2+\sqrt{3}$ są równe, czyli, że $\frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}{2+\sqrt{3}} = 1$.
Najpierw rozszerzymy ułamek, żeby usunąć niewymierność z mianownika:

$$\frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{(7+4\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^2}}{4-3} = \sqrt{(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})} = \sqrt{49-48} = 1.$$

Pokaż podobnie, że $\sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{5}-1$.

1.2. Istnieje wygodny sposób szybkiego podnoszenia do kwadratu liczb dwucyfrowych kończących się cyfrą 5:
$35^2 = 100\cdot 3\cdot 4 + 25 = 1225$,
$75^2 = 100\cdot 7\cdot 8 + 25 = 5625$,
który wynika z następującego rozumowania:

$$(10a+5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = 100a(a+1) + 25.$$

Znajdź sposób szybkiego podnoszenia do kwadratu liczb złożonych z całości i $\frac{1}{2}$ i uzasadnij go. Oblicz w ten sposób $\left(4\frac{1}{2}\right)^2$ oraz $\left(9\frac{1}{2}\right)^2$.

1.3. Aby wyznaczyć wszystkie liczby całkowite c, dla których liczba postaci $\frac{c-3}{c-5}$ jest także liczbą całkowitą można postąpić w następujący sposób:
a) Wyrażenie w liczniku ułamka zapisujemy w postaci sumy, której jednym ze składników jest wyrażenie z mianownika:

$$\frac{c-3}{c-5} = \frac{(c-5)+2}{c-5}$$

b) Zapisujemy powyższy ułamek w postaci sumy liczby 1 oraz pewnego ułamka:

$$\frac{c-5+2}{c-5} = \frac{c-5}{c-5} + \frac{2}{c-5} = 1 + \frac{2}{c-5}$$

c) Zauważamy, że ułamek $\frac{2}{c-5}$ jest liczbą całkowitą wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $(c-5)$ jest całkowitym dzielnikiem liczby 2, czyli że $(c-5) \in \{-1, 1, -2, 2\}$.
d) Rozwiązujemy kolejno równania $c-5=-1$, $c-5=1$, $c-5=-2$, $c-5=2$, i otrzymujemy odpowiedź: liczba postaci $\frac{c-3}{c-5}$ jest całkowita dla: $c=4$, $c=6$, $c=3$, $c=7$.
Rozumując analogicznie, wyznacz wszystkie liczby całkowite x, dla których liczba postaci $\frac{x}{x-3}$ jest liczbą całkowitą.

1.4. Sumę $S = \frac{3}{1\cdot 4} + \frac{3}{4\cdot 7} + \frac{3}{7\cdot 10} + ... + \frac{3}{301\cdot 304} + \frac{3}{304\cdot 307}$ można obliczyć w następujący sposób:
a) sumę S zapisujemy w postaci

$$S = \frac{4-1}{4\cdot 1} + \frac{7-4}{7\cdot 4} + \frac{10-7}{10\cdot 7} + ... + \frac{304-301}{304\cdot 301} + \frac{307-304}{307\cdot 304}$$

b) każdy składnik tej sumy przedstawiamy jako różnicę ułamków

$$S = \left(\frac{4}{4\cdot 1} - \frac{1}{4\cdot 1}\right) + \left(\frac{7}{7\cdot 4} - \frac{4}{7\cdot 4}\right) + ... + \left(\frac{304}{304\cdot 301} - \frac{301}{304\cdot 301}\right) + \left(\frac{307}{307\cdot 304} - \frac{304}{307\cdot 304}\right)$$

stąd

$$S = \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10}\right) + ... + \left(\frac{1}{301} - \frac{1}{304}\right) + \left(\frac{1}{304} - \frac{1}{307}\right)$$

więc

$$S = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + ... + \frac{1}{301} - \frac{1}{304} + \frac{1}{304} - \frac{1}{307}$$

c) obliczamy sumę, redukując parami wyrazy sąsiednie, poza pierwszym i ostatnim

$$S = 1 - \frac{1}{307} = \frac{306}{307}$$

Postępując w analogiczny sposób, oblicz sumę

$$S_1 = \frac{4}{1 \cdot 5} + \frac{4}{5 \cdot 9} + \frac{4}{9 \cdot 13} + ... + \frac{4}{281 \cdot 285}$$

1.5. Wiadomo, że wielomian określony wzorem $W(x) = x^4 + 1$ nie ma pierwiastków rzeczywistych, bo dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ wyrażenie $x^4 + 1$ przyjmuje wartości dodatnie. Można go jednak rozłożyć na iloczyn czynników nierozkładalnych stopnia drugiego w następujący sposób:

• najpierw zapisujemy wyrażenie $x^4 + 1$ w postaci sumy kwadratów: $(x^2)^2 + 1^2$;

• następnie uzupełniamy tę sumę do pełnego kwadratu (jak poniżej):

$$(x^2)^2 + 1^2 = (x^2)^2 + 2x^2 + 1^2 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2;$$

• otrzymaną różnicę $(x^2 + 1)^2 - 2x^2$ zapisujemy w postaci różnicy kwadratów:

$$(x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2;$$

• stosujemy wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów:

$$(x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = (x^2 + 1 - \sqrt{2}x)(x^2 + 1 + \sqrt{2}x);$$

• i otrzymujemy rozkład wielomianu $W(x)$ na iloczyn czynników nierozkładalnych:

$$W(x) = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1).$$

• Postępując analogicznie, rozłóż na czynniki nierozkładalne wielomian $Q(x) = x^4 + 9$.

1.6. Aby wyznaczyć wszystkie pary (x, y) liczb całkowitych spełniające równanie: $xy = x - y + 3$, można postąpić następująco:

krok 1. Najpierw przekształcamy to równanie do postaci: $(xy - x) + y = 3$

krok 2. Następnie z pierwszego składnika sumy po lewej stronie tego równania, czyli z nawiasu, wyłączamy wspólny czynnik przed nawias a drugi składnik sumy uzupełniamy do wyrażenia, które występuje w nawiasie tak, by równania pozostały równoważne:

$$x(y - 1) + (y - 1) = 3 - 1.$$

krok 3. Lewą stronę otrzymanego równania zapisujemy w postaci iloczynowej przez wyłączenie wspólnego czynnika $(y - 1)$ przed nawias:

$$(y - 1)(x + 1) = 2.$$

krok 4. Ponieważ lewa strona tego równania jest iloczynem dwóch czynników całkowitych, więc jego prawą stronę, czyli liczbę 2 również przedstawiamy w postaci iloczynu dwóch liczb całkowitych:

$$(y - 1)(x + 1) = 2 = 1 \cdot 2 = 2 \cdot 1 = (-1) \cdot (-2) = (-2) \cdot (-1).$$

krok 5. Porównujemy obie strony rownania i zapisujemy je w postaci alternatywy czterech układów równań (bo tyle otrzymaliśmy rozkładów liczby 2 w postaci iloczynu liczb całkowitych):

$[(x + 1)(y - 1) = 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{cases} x + 1 = 1 \\ y - 1 = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x + 1 = 2 \\ y - 1 = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x + 1 = -1 \\ y - 1 = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x + 1 = -2 \\ y - 1 = -1 \end{cases} \right]$$

krok 6. Rozwiązujemy powyższe układy równań:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases}$$

krok 7. Na koniec wyciągamy wniosek, że jedynymi parami liczb całkowitych spełniającymi wyjściowe równanie są pary liczb: $(0, 3), (1, 2)(-2, -1), (-3, 0)$.

Postępując analogicznie, wyznacz wszystkie pary liczb całkowitych spełniające równanie: $xy = 2x - y + 5$.

1.7. Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b określamy liczby $a \circ b$, $a * b$ w następujący sposób:
$a \circ b =$ liczba nie mniejsza spośród liczb a i b
$a * b =$ liczba nie większa spośród liczb a i b.
Na przykład: $7 \circ 3 = 7$, $15 \circ 15 = 15$ $7 * 3 = 3$, $(-6) * 4 = -6$, $(-3) * (-3) = -3$.
Oblicz:
a) $(-5) \circ 4 =$
b) $(2005 * 2007) \circ (-2006) =$
c) $(5 \circ 6) * (2 \circ 7) =$

1.8. (R)Dany jest algorytm (Euklidesa) obliczania $NWD(a, b)$ i $NWW(a, b)$:
niech $a = 22991$ i $b = 19667$,

$$22991 > 19667$$
$$\Downarrow$$
$$22991 = 1 \cdot 19667 + 3324$$
$$19667 = 5 \cdot 3324 + 3047$$
$$3324 = 1 \cdot 3047 + 277$$
$$3047 = 11 \cdot 277 + 0$$
$$\Downarrow$$
$$NWD(22991, 19667) = 277$$
$$NWW(22991, 19667) = \frac{22991 \cdot 19667}{277} = 1632361.$$

Korzystając z podanego algorytmu oblicz:

$$NWD(1615, 2618) \;\; i \;\; NWW(1615, 2618)$$

1.9. (R) Sumę kolejnych liczb nieparzystych od 1 do 999, tzn. sumę

$$S = 1 + 3 + ... + 995 + 997 + 999$$

można obiczyć grupując składniki parami:

$$S = (1 + 999) + (3 + 997) + ... + (499 + 501),$$

tak, że suma liczb każdej pary wynosi 1000. Par jest 250, bo składników było 500, stąd:

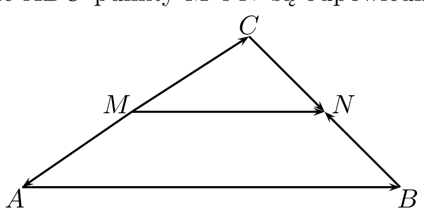
$$S = 250 \cdot 1000 = 250000.$$

Analogicznie oblicz sumę:

$$S = 5 + 10 + ... + 990 + 995 + 1000.$$

1.10. (R) *„Liczba naturalna jest podzielna przez 36, gdy jest podzielna przez 4 i jest podzielna przez 9”.* Np. Liczba 187524 jest podzielna przez 36, bo jest podzielna przez 9, gdyż jej suma cyfr $1+8+7+5+2+4 = 27$ jest podzielna przez 9 oraz jest podzielna przez 4, bo liczba utworzona z dwóch ostanich cyfr, czyli liczba 24 jest podzielna przez 4.
a) Wykorzystując podaną zasadę podzielności, sprawdź, że liczba 24110352 jest podzielna przez 36.
b) Podaj, jaką cyfrą powinno zastąpić się X, aby liczba 51403X8 była podzielna przez 36.
c) Uzasadnij, że liczby naturalne postaci $10^n + 8$, gdzie n jest liczbą naturalną większą od 1, są podzielne przez 36.

1.11. (R) W dowolnym trójkącie ABC punkty M i N są odpowiednio środkami boków AC i BC



Zapoznaj się uważnie z następującym rozumowaniem:
Korzystając z własności wektorów i działań na wektorach, zapisujemy równości:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \quad (1)$$

oraz

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN} \quad (2)$$

Po dodaniu równości (1) i (2) stronami otrzymujemy:

$$2 \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN}$$

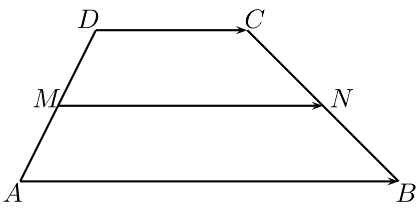
Ponieważ $\overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MA}$ oraz $\overrightarrow{CN} = -\overrightarrow{BN}$, więc:

$$2 \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BN}$$

$$2 \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{0}$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Wykorzystując własności iloczynu wektora przez liczbę, ostatnią równość można zinterpretować następująco: **odcinek łączący środki dwóch boków dowolnego trójkąta jest równoległy do trzeciego boku tego trójkąta, zaś jego długość jest równa połowie długości tego boku.**
Przeprowadzając analogiczne rozumowanie, ustal związek pomiędzy wektorem $\overrightarrow{MN}$ oraz wektorami $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$, wiedząc, że czworokąt $ABCD$ jest dowolnym trapezem, zaś punkty M i N są odpowiednio środkami ramion AD i BC tego trapezu



Podaj interpretację otrzymanego wyniku.

1.12. (RR) Korzystając z równości $\frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$, można obliczyć następującą granicę:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{(n-1)\cdot n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + ... + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$$

Wykaż równość $\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{n(2n+2)}$, a następnie, korzystając z niej, oblicz granicę:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 6} + \frac{1}{3\cdot 8} + ... + \frac{1}{n\cdot(2n+2)}\right).$$

2 Zastosowania matematyki

2.1. W automacie oferowany jest napój „Malinka” w różnych opakowaniach i cenach:
a) $0,2$ l za $1,10$ zł
b) $0,25$ l za $1,30$ zł
c) $0,33$ l za $1,70$ zł
d) $0,5$ l za $2,60$ zł
Którą ofertę wybrać, aby za 1 zł wypić najwięcej „Malinki”?

2.2. Odległość Ziemi od Słońca wynosi w przybliżeniu 150 milionów kilometrów. Wyraź tę wielkość w milimetrach. Wynik podaj w postaci $a \cdot 10^n$, gdzie $a \in (1, 10)$, $n \in \mathbb{N}$.

2.3. Cena 1 kWh energii elektrycznej wynosi 46 gr. Ile kosztuje ogrzewanie mieszkania przez tydzień dwoma grzejnikami o mocy 1,5 kW. Każdy grzejnik pracuje 5 godzin na dobę.

2.4. Wiadro wisi przywiązane do łańcucha nawiniętego na wałek kołowrotu, tak jak przedstawiono na rysunku. Aby wiadro dotknęło lustra wody należy wykonać 14 pełnych obrotów korbą. Oblicz, odległość lustra wody od brzegu studni, gdy wiadomo, że wałek kołowrotu ma średnicę 20 cm. Wynik podaj w zaokrągleniu do 1 m.

2.5. Świeżo skoszona trawa zawiera 60% wody, a wysuszone siano tylko 15% wody. Oblicz, ile kilogramów wysuszonego siana można otrzymać z 1 tony świeżo skoszonej trawy? Wynik podaj w zaokrągleniu do pełnych kilogramów.

2.6. **a)** Ile kilogramów wody należy dolać do 0,5 kg 30% roztworu soli, aby otrzymać roztwór 5%.
b) W jakim stosunku należy zmieszać roztwór cukru o stężeniu 10% z roztworem cukru o stężeniu 16% aby otrzymać roztwór cukru o stężeniu 12%?
c) Ania i Zosia kupiły pewną ilość pomarańczy. Ania zrobiła sok z 30%, a Zosia z 25% zakupionych owoców. O ile procent więcej soku zrobiła Ania?

2.7. Wzrost kursu euro w stosunku do złotego spowodował podwyżkę ceny wycieczki zagranicznej o 5%. Ponieważ nowa cena nie była zachęcająca, postanowiono obniżyć ją o 8%, ustalając cenę promocyjną równą 1449 zł. Oblicz pierwotną cenę wycieczki dla jednego uczestnika.

2.8. Wysokość prowizji, którą klient płaci w pewnym biurze maklerskim przy każdej zawieranej transakcji kupna lub sprzedaży akcji jest uzależniona od wartości transakcji. Zależność ta została przedstawiona w tabeli:

Wartość transakcji	Wysokość prowizji
do 500 zł	15 zł
od $500,01$ zł do 3000 zł	2% wartości transakcji + 5 zł
od $3000,01$ zł do 8000 zł	$1,5$% wartości transakcji + 20 zł
od $8000,01$ zł do 15000 zł	1% wartości transakcji + 60 zł
powyżej 15000 zł	$0,7$% wartości transakcji + 105 zł

Klient zakupił za pośrednictwem tego biura maklerskiego 530 akcji w cenie 25 zł za jedną akcję. Po roku sprzedał wszystkie kupione akcje po 45 zł za jedną sztukę. Oblicz, ile zarobił na tych transakcjach po uwzględnieniu prowizji, które zapłacił.

2.9. Dziadek przeznaczył 150 zł na prezenty gwiazdkowe dla swoich trzech wnuków. Wartość prezentów była proporcjonalna do wieku chłopców, którzy mają odpowiednio 2 lata, 3 lata i 5 lat. Ile kosztowały poszczególne prezenty?

2.10. Linę żaglową długości 42 metry rozcięto na trzy części w ten sposób, że pierwsza była cztery razy dłuższa od drugiej, która z kolei była cztery razy dłuższa od trzeciej części. Jakie długości mają pocięte kawałki liny?

2.11. Mieszanka herbaty składa się z 3 części herbaty klasy A, 17 części herbaty klasy B i 4 części herbaty klasy C. Ile dekagramów herbaty klasy B jest w 72 dag tej mieszanki?

2.12. Średnia płaca w pewnym starostwie zatrudniającym 50 pracowników wynosiła 2000 zł. Po zatrudnieniu nowego pracownika stażysty średnia miesięczna płaca spadła o 1%. Oblicz płacę nowego pracownika.

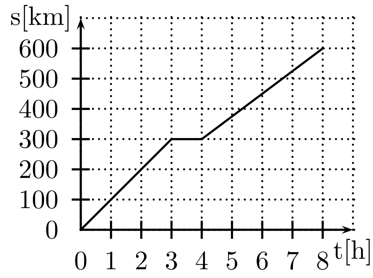
2.13. W pewnym zakładzie każdy z dziesięciu pracowników wykonuje w ciągu jednej zmiany średnio 2700 detali. Po zatrudnieniu nowego pracownika średnia wykonywanych detali w ciągu zmiany spadła o 4%. Oblicz, ile detali wykonuje w ciągu zmiany nowozatrudniony pracownik?

2.14. Pewna pompa pompuje 20 m^3 wody w 2 godziny i 40 minut.
a) Ile czasu potrzeba, by ta pompa wypompowała 100 m^3 wody?
b) Ile wody wypompuje ta pompa w ciągu 1 godziny i 15 minut?

2.15. W mieście działają dwie firmy taksówkowe A i B. Za przejazd taksówką firmy A pobierana jest opłata opisana wzorem: $A(x) = 4 + 1,6x$, natomiast za przejazd taksówką firmy B wzorem: $B(x) = 3,2 + 1,7x$, przy czym x oznacza liczbę przejechanych kilometrów. Dla jakich wartości x długości trasy przejazdu, opłata za przejazd taksówką firmy A jest niższa od opłaty za przejazd taksówką firmy B?

2.16. Przemieszczanie s (w metrach) pewnego ciała jest funkcją czasu t (w sekundach) opisaną wzorem: $s(t) = t^2 + 6t + 10$. Oblicz średnią prędkość tego ciała w czasie $t \in \langle 4, 7\rangle$.

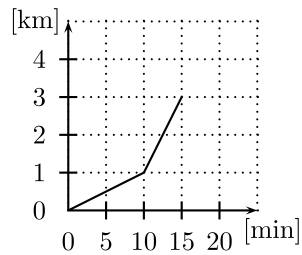
2.17. Dany jest wykres drogi jaką przejechał kierowca pewnego samochodu w ciągu 8 godzin.
a) Jaką drogę pokonał kierowca w ciągu drugiej godziny jazdy?
b) Jaka była średnia prędkość na całej trasie?
c) Jak długo jechał kierowca z prędkością $75\frac{km}{h}$?



2.18. Dwie konkurencyjne firmy „Alfa” i „Beta” chcą podjąć się organizacji wycieczki. Opłata za wycieczkę w przypadku każdej z ofert składa się z części stałej, niezależnej od liczebności grupy oraz stawki za każdego uczestnika. Opłata stała i stawka wynoszą odpowiednio 3000 zł i 245 zł w firmie „Alfa” oraz 4400 zł i 206 zł w firmie „Beta”. Oblicz:
a) przy jakiej liczbie uczestników wycieczki korzystniejsza jest oferta firmy „Alfa”,
b) jakie koszty przypadną na każdego z 38 uczestników wycieczki zorganizowanej przez firmę „Beta” (koszty podaj z dokładnością do 1 zł).

2.19. Pewna firma telekomunikacyjna proponuje abonentowi do wyboru dwa warianty opłat miesięcznych za telefon.
I - za każdy impuls 20 groszy i jednocześnie brak opłaty stałej.
II - za każdy impuls 8 groszy i jednocześnie opłatę stałą w wysokości 12 zł.
a) Dla każdej z możliwości zapisz w postaci wzoru zależność między miesięczną opłatą za telefon a liczbą wykorzystywanych w miesiącu impulsów.
b) Którą z możliwości należy wybrać, jeżeli zakładamy, że miesięcznie wykorzystuje się 120 impulsów?
c) Oblicz, przy jakiej liczbie impulsów wykorzystywanych w ciągu miesiąca wybór pomiędzy podanymi wariantami nie ma znaczenia.

2.20. Bogdan pierwszą część drogi do szkoły szedł, a drugą biegł (patrz wykres). Oblicz z jaką prędkością szedł, a z jaką biegł i jaka była jego średnia prędkość na całej trasie. Wyniki podaj w kilometrach na godzinę.



2.21. **Test wyboru.** Zaznacz poprawne odpowiedzi.

a) W klasie jest 32 uczniów, w tym 20 dziewcząt. Jaki procent wszystkich uczniów stanowią chłopcy?
(A) 35% **(B)** $37,5\%$ **(C)** $35,5\%$ **(D)** 32%

b) Jeżeli stawka za godzinę pracy jest równa $8,40$ zł, to ile zarobi robotnik pracując od $7^{\underline{30}}$ do $16^{\underline{00}}$?
(A) $69,72$ zł **(B)** $100,20$ zł **(C)** $37,40$ zł **(D)** $71,40$ zł

c) Dziesięć lat temu Pyrki liczyły 1500 mieszkańców, a obecnie mieszka w nich $4,5$ tys. osób. O ile procent wzrosła liczba Pyrkowian?

(A) 75% **(B)** 120% **(C)** 300% **(D)** 200%

d) Bieżnia stadionu ma 8 torów. Podczas eliminacji po dwóch zawodników przechodzi do następnej rundy. Startuje 110 zawodników. Jaka jest najmniejsza liczba biegów potrzebna do wyłonienia zwycięzcy zawodów?
(A) 15 **(B)** 19 **(C)** 20 **(D)** 21

e) Pierwszy mechanik montuje telewizor przez 45 minut, drugi przez 20 minut, a trzeci przez $\frac{2}{3}$ h. Jaki jest średni czas montażu jednego telewizora?
(A) $\frac{7}{12}$ h **(B)** $\frac{3}{4}$ h **(C)** 35 minut **(D)** $\frac{5}{12}$ h

f) W stadzie 30 owiec Bacy są 4 czarne. Jeżeli Baca dokupi jeszcze 2 czarne owce, to jaką część stada będą stanowiły czarne owce?
(A) $\frac{1}{5}$ **(B)** $\frac{1}{6}$ **(C)** $\frac{2}{9}$ **(D)** $\frac{3}{16}$

g) Ile pętelek można zrobić z $3\frac{1}{5}$ m gumki, jeżeli do zrobienia jednej pętelki potrzeba $\frac{3}{20}$ m gumki?
(A) 15 **(B)** 7 **(C)** 22 **(D)** 21

h) Jedna trzecia pracowników firmy „BAMBUS” jedzie na urlop w lipcu, jedna druga w sierpniu, a pozostali (15 pracowników) wykorzystuje urlop zimą. Ile osób pracuje w firmie ”BAMBUS”?
(A) 45 **(B)** 60 **(C)** 90 **(D)** 120

2.22. (R) Pociąg o długości 500 m jadący ze stałą prędkością 48 $\frac{km}{h}$ przejeżdża przez tunel. Od momentu wjazdu lokomotywy do tunelu do momentu opuszczenia go przez ostatni wagon pociągu upływa 2,5 minuty. Oblicz długość tunelu.

2.23. (R) Z dwóch miejscowości A i B ruszają naprzeciw siebie dwaj piechurzy. Pierwszy z nich pokonał trasę z miejscowości A do B i nie zatrzymując się wrócił do miasta A. Drugi pokonał tę samą drogę, co pierwszy, tyle, że ruszył z miasta B, doszedł do miasta A i nie zatrzymując się wrócił do miasta B. Piechurzy minęli się po raz pierwszy w odległości 4 km od miasta A, a po raz drugi w odległości 2 km od miasta B. Oblicz odległość między miastami A i B.

3 Liczby rzeczywiste

3.1. Wykonaj działania:
a) $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{81}$
b) $\frac{1}{1+\sqrt[3]{3}}$
c) dla $a=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ i $b=\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$, oblicz $a\cdot b$, $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$, $(a-b)^2$, $\frac{1}{a^2}+b^2$
d) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{7-4\sqrt{3}}$

3.2. Stosując wzory skróconego mnożenia rozłóż na czynniki wyrażenie: $1-a^2+2ab-b^2$.

3.3. Oblicz:
a) $\sqrt{-2\sqrt[3]{-8}}$
b) $\sqrt[7]{-\sqrt[6]{-\sqrt[5]{-1}}}$
c) $((\sqrt[3]{\sqrt[5]{3}})^3)^5$
d) $\frac{\sqrt[3]{-60}\,\sqrt[3]{50}}{\sqrt[3]{4}\,\sqrt[3]{6}}$
e) $\sqrt{x}-\sqrt{8}=\sqrt{32}$
f) $\frac{1}{x}=\sqrt[3]{0,064}$

3.4. Dane są liczby: $x=5\sqrt{7}-2$ i $y=\sqrt{7}-4$. Oblicz wartości wyrażeń: $|y-x|$ oraz $\frac{x}{y}$. Wyniki przedstaw w postaci $a+b\sqrt{7}$, gdzie a i b są liczbami wymiernymi.

3.5. Oblicz, jaki procent liczby x stanowi liczba y, gdy $x = \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{\sqrt{144}}\right) : \left(2^{-2} - 3 \cdot 2^{-4}\right)$, $\quad y = \frac{3^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{3}}$.

3.6. Dane są wyrażenia arytmetyczne: $m = \frac{\binom{5}{3}}{\frac{5}{3}}$ i $n = \frac{2^{-2} \cdot (0,5)^{-5}}{64^{\frac{1}{6}}}$

a) Oblicz wartość wyrażeń m i n.
b) Dobierz liczbę k tak, by (m, n, k) były kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.

3.7. Przedstaw $\frac{4^{-1} - 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}{5 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}}$ w postaci nieskracalnego ułamka zwykłego.

3.8. W pewnej firmie zakupiono dwie drukarki. Pierwsza kosztowała 1000 zł, a druga 1200 zł. Okazało się, że jeden wydruk uzyskany z pierwszej drukarki kosztuje 5 gr a z drugiej 4 gr. Dla jakich x całkowity koszt (łącznie z ceną zakupu) wykonania x wydruków na pierwszej drukarce będzie bardziej opłacalny, niż całkowity koszt wykonania x wydruków na drugiej z nich?

3.9. Oblicz:
a) $3 + 2,(9)$
b) $2 + 3,(4)$
c) $6 - 2,(7)$
d) $2 \cdot 0,(1) + 0,(7)$
e) $1,(09) + 0,(90)$
f) Zamień liczbę $1,24(36)$ na ułamek zwykły.

3.10. Podaj przykład liczb całkowitych dodatnich a i b, spełniających nierówność $\frac{5}{7} < \frac{a}{b} < \frac{6}{7}$.

3.11. **a)** Kibic obserwując zawody lekkoatletyczne oszacował długość rzutu młotem na 78 m 40 cm, a okazało się, że młociarz rzucił młot na odległość 77 m 76 cm.
b) Długość skoku trójskoczka kibic ocenił na 17 m i 20 cm, natomiast rezultat jaki po chwili ukazał się na tablicy wyników to 17,36 m. W którym przypadku kibic popełnił większy błąd względny?

3.12. Dane są liczby: $a = \frac{(-3) \cdot \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} - 4\frac{3}{8}\right)}{2}$ oraz $b = \left(\frac{13}{16} - (-0,3)\right) \cdot \left(\frac{25}{16}\right)^{\frac{1}{2}}$.
a) Oblicz wartości dokładne oraz wartości przybliżone obu liczb w zaokrągleniu do 0,01.
b) Wyznacz błąd względny i bezwzględny przybliżenia liczby a.

3.13. Wiadomo, że $1,5849$ jest przybliżeniem liczby $10^{0,2}$ z zaokrągleniem do 4 miejsc po przecinku. Wyznacz przybliżenie liczby $10^{-\frac{4}{5}}$ z zaokrągleniem do 3 miejsc po przecinku oraz przybliżenie liczby $10^{\frac{11}{5}}$ z zaokrągleniem do 1 miejsca po przecinku.

3.14. W partii 50000 żarówek, 4% to żarówki uszkodzone. Ile uszkodzonych żarówek należałoby usunąć, aby wśród pozostałych żarówek było mniej niż 1% żarówek uszkodzonych?

3.15. Klient złożył w banku A 5000 zł na okres 2 lat z oprocentowaniem rocznym 5% i roczną kapitalizacją odsetek. Okazało się później, że gdyby tę samą kwotę złożył w banku B, to po dwóch latach miałby o 343 zł więcej. Oblicz jakie oprocentowanie oferował bank B, jeśli kapitalizacja wkładów odbywała się w nim co pół roku.

3.16. Cena płaszcza kolejno malała najpierw o 20%, a następnie o 30% i wtedy kosztował on 700 złotych. Jaka była cena płaszcza przed obniżkami?

3.17. Jeden z boków prostokąta zmniejszono o 40%, a drugi zwiększono o 50%. O ile procent zmieniło się pole prostokąta?

3.18. W 1995 roku zbiory kawy na świecie wynosiły 5489 tys. ton, a w roku 2001 - 7300 tys. ton. W Wietnamie zebrano w 1995 roku 4%, a w 2001 roku $12,3\%$ światowego zbioru kawy. O ile punktów procentowych zbiory kawy w Wietnamie były większe w 2001 roku w porównaniu z 1995 rokiem. O ile procent wzrosły zbiory kawy w Wietnamie w 2001 roku w porównaniu z rokiem 1995?

3.19. **Test wyboru.** Zaznacz poprawne odpowiedzi.

a) Liczbą odwrotną do liczby $3-2\sqrt{2}$ jest:
(A) $3+2\sqrt{2}$ **(B)** $-3+2\sqrt{2}$ **(C)** $3-2\sqrt{2}$ **(D)** $\frac{1}{3}-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

b) Wyrażenie $(x-2)^3-(x-1)(x^2+x+1)-2(x+2)^2$ po doprowadzeniu do najprostszej postaci jest równe:
(A) $-2x^2-15$ **(B)** $2x^3+8x^2+1$ **(C)** x^3-4 **(D)** $-8x^2+4x-15$

c) Liczba $0,(45)$ po zamianie na ułamek zwykły jest równa:
(A) $\frac{45}{100}$ **(B)** $\frac{5}{11}$ **(C)** $\frac{9}{20}$ **(D)** $\frac{45}{10}$

d) Wyznacz l ze wzoru $P=\pi r^2+\pi rl$
(A) $\frac{P}{\pi r}-r$ **(B)** $\frac{\pi r^2-P}{\pi r}$ **(C)** $\frac{P}{\pi r^2}-\pi r$ **(D)** $(P-\pi r^2)\cdot \pi r$

e) Suma liczby odwrotnej do $-3\frac{1}{2}$ i przeciwnej do $3\frac{5}{7}$ jest równa:
(A) 5 **(B)** $4,5$ **(C)** $-3\frac{6}{7}$ **(D)** -4

f) Wartością wyrażenia $\frac{\sqrt{8}\cdot 8^2\cdot 125}{\sqrt{32}\cdot 5^3}$ jest liczna:
(A) $\frac{125\sqrt{2}}{4}$ **(B)** $\frac{64}{5}$ **(C)** 64 **(D)** 32

g) Uwalniając ułamek $\frac{4}{\sqrt{3}-1}$ od niewymierności, otrzymasz:
(A) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ **(B)** $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ **(C)** $4(\sqrt{3}-1)$ **(D)** $2(\sqrt{3}+1)$

3.20. (R) Niech $a=2\cdot 3\cdot 5^2\cdot 11^5$ i $b=4\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7\cdot 11^4$
a) Wyznacz $NWW(a,b)$ i $NWD(a,b)$.
b) Oblicz $\frac{NWW(a,b)}{NWD(a,b)}$.
c) Wykaż, że $NWW(a,b)\cdot NWD(a,b)=a\cdot b$.

3.21. (R) Rozłóż liczby a i b na czynniki pierwsze, a następnie wyznacz $NWW(a,b)$ i $NWD(a,b)$, gdy
a) $a=429,\ b=143$
b) $a=105,\ b=187$
c) $a=24,\ b=60$

3.22. (R) Sprawdź, czy liczby $a=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$ i $b=2,5(9)$ należą do zbioru rozwiązań nierówności $\frac{8}{x}\geqslant 3$.

3.23. (R) Oblicz: $(\sqrt{2-\sqrt{3}}-\sqrt{2+\sqrt{3}})^2$.

3.24. (R) Wykaż, bez użycia kalkulatora i tablic, że $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ jest liczbą całkowitą.

3.25. (R) Wykaż, że dla $a\in(2,3)$ zachodzi równość $\frac{\sqrt{a^2-6a+9}}{3-a}+\frac{\sqrt{a^2-4a+4}}{a-2}=2$.

3.26. (R) Na budowę domu można zaciągnąć pożyczkę w wysokości 63450 euro. Do wyboru są dwa warianty spłaty:
I - w każdym miesiącu spłacasz równe raty każdą w wysokości 2% pożyczonej kwoty.
II - pierwsza rata miesięczna wynosi 2500 euro, każda następna jest o 50 euro mniejsza niż poprzednia.
a) Ile miesięcy potrwa spłata mieszkania w każdym z wariantów ?
b) Oblicz, ile wynosi ostatnia rata spłaty w każdym z wariantów.
c) Oblicz, od którego miesiąca rata spłacana według wariantu II będzie niższa niż w przypadku wariantu I.

3.27. (R) Liczbą palindromiczną nazywamy liczbę naturalną, która czytana z prawej do lewej lub z lewej do prawej strony daje tę samą liczbę np.: 5225. Udowodnij, że liczba czterocyfrowa palindromiczna jest podzielna przez 11.

3.28. (R) Bank przyjął kwotę 50000 zł na 5% rocznie z roczną kapitalizacją odsetek i pożyczył ją na 6% rocznie z tą samą kapitalizacją. Ile zyskał bank w ciągu pięciu lat, a ile zyskał w ciągu dziesięciu lat?

3.29. (R) Dane są liczby: $\sqrt{6}-\sqrt{5}$, $\sqrt{6}+\sqrt{5}$, $\frac{5-2\sqrt{5}}{5}$, $\frac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$. Zbadaj, czy wśród tych liczb jest para liczb przeciwnych i czy jest wśród nich para liczb odwrotnych.

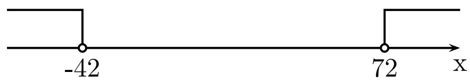
3.30. (R)
a) Oblicz $\frac{1}{1-\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{5}} + ... + \frac{1}{\sqrt{99}-\sqrt{100}}$.
b) Oblicz a^4+b^4, gdy $a^2+b^2=9$ oraz $a+b=1$.
c) Wykaż, że jeśli $x+y+z=0$, to $xy+yz+zx \leqslant 0$.
d) Wykaż, że jeśli $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=...=\frac{a_n}{b_n}$ i $b_1+b_2+b_3+...+b_n \neq 0$ to $\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_n}{b_1+b_2+b_3+...+b_n}=\frac{a_1}{b_1}$.

4 Zbiory

4.1. Zbiór A ma 12 elementów, zbiór B ma 9 elementów, zbiór $A\cup B$ ma 17 elementów. Ile elementów należy do zbioru $A \setminus B$.

4.2. Wykonaj działania na zbiorach:
a) $\mathbb{C}, \mathbb{N}$
b) $\mathbb{W}, \mathbb{NW}$
c) $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{-2,-1,0,1,2\}$
d) $A=\{x\in\mathbb{N}: 10|x\}$, $B=\{x\in\mathbb{N}: 5|x\}$

4.3. Zbiór A jest zbiorem tych wszystkich liczb rzeczywistych, które spełniają nierówność $|x+24| \leqslant 96$, a zbiór B jest przedstawiony na osi liczbowej.



a) Zapisz zbiór A w postaci przedzialu liczbowego.
b) Opisz zbiór B za pomocą nierówności z wartością bezwzględną.
c) Wykaż, że liczba 72 należy do zbioru $A \setminus B$.

4.4. Wyznacz wszystkie liczby $x\in\mathbb{R}$, które spełniają nierówność $x^2<4x$, ale nie spełniają nierówności $|x+2|<3$.

4.5. Dane są zbiory: $A=\{x\in\mathbb{R}: x^2-4x-5\leqslant 0\}$ oraz $B=\{x\in\mathbb{R}: x^2-3x>0\}$. Zaznacz na osi liczbowej zbiory A i B oraz wyznacz zbiory $A\cap B$ i $B\setminus A$.

4.6. Zbiór A jest zbiorem rozwiązań nierówności: $-x^2+2x+3\geqslant 0$, zbiór B jest dziedziną funkcji wymiernej $W(x)=\frac{x^2-9}{4x-x^2}$. Wyznacz różnicę zbiorów $A\setminus B$.

4.7. Dane są zbiory: $A=\{x\in\mathbb{R}: |5-x|\geqslant 3\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}: x^2-9\geqslant 0\}$ i $C=\{x\in\mathbb{R}: \frac{x+1}{x-1}\leqslant 1\}$.
a) Zaznacz na osi liczbowej zbiory A, B, i C.
b) Wyznacz i zapisz za pomocą przedziału liczbowego $C\setminus(A\cap B)$.

4.8. Dane są zbiory liczb rzeczywistych: $A=\{x: |x+2|<3\}$ oraz $B=\{x: (2x-1)^3\leqslant 8x^3-13x^2+6x+3\}$. Zapisz w postaci przedziałów liczbowych zbiory A, B, $A\cap B$ oraz $B\setminus A$.

4.9. Na osi liczbowej zaznaczono przedział A złożony z tych liczb rzeczywistych, których odległość od punktu 1 jest niewiększa od $4,5$. Przedział A przesunięto wzdłuż osi o 2 jednostki w kierunku dodatnim, otrzymując przedział B. Wyznacz wszystkie liczby całkowite, które należą jednocześnie do A i do B.

4.10. Dane są zbiory: $A=\{x\in\mathbb{R}: |x-4|\geqslant 7\}$ oraz $B=\{x\in\mathbb{R}: x^2>0\}$. Zaznacz na osi liczbowej:
a) zbiór A
b) zbiór B
c) zbiór $C=B\setminus A$.

4.11. **Test wyboru.** Zaznacz poprawne odpowiedzi.

a) Wskaż zdanie prawdziwe:
(A) $\mathbb{N}\cap\mathbb{C}=\mathbb{N}$ **(B)** $\mathbb{W}\subset\mathbb{N}$ **(C)** $\mathbb{C}\cap\mathbb{N}=\mathbb{C}$ **(D)** $\mathbb{C}\cup\mathbb{N}=\mathbb{C}$

b) Sumą zbiorów $A = (-5; 0)$ i $B = \langle -1; 3 \rangle$ jest:
(A) $A \cup B = (-5; 3\rangle$ **(B)** $A \cup B = \langle -1; 0)$ **(C)** $A \cup B = (-5; \infty)$ **(D)** $A \cup B = (0, 3\rangle$

c) Iloczynem zbiorów $A = (-\infty; 0)$ i $B = (-3; 2\rangle$ jest:
(A) $A \cap B = \langle -3; 0 \rangle$ **(B)** $A \cap B = (-\infty; 2\rangle$ **(C)** $A \cap B = (2; \infty)$ **(D)** $A \cap B = (-3, 0)$

d) Różnicą zbiorów $A = (-1; 1\rangle$ i $B = (0; 2\rangle$ jest:
(A) $B \setminus A = (1; 2\rangle$ **(B)** $B \setminus A = (-1; 0)$ **(C)** $B \setminus A = (-1; 0)$ **(D)** $B \setminus A = (-1; 0\rangle$

e) Wskaż zbiór rozwiązań równania $|3x - 2| = 4$
(A) $\{4; 0\}$ **(B)** $\{3; 2\}$ **(C)** $\{\frac{2}{3}; -2\}$ **(D)** $\{-\frac{2}{3}; 2\}$

f) Zbiorem rozwiązań nierówności $|x - 2| \leqslant 4$ jest:
(A) $(-\infty; -2\rangle \cup \langle 6; \infty)$ **(B)** $\langle -2; 6\rangle$ **(C)** $(-2; 6)$ **(D)** $(-\infty; -2) \cup (6; \infty)$

g) Wskaż zbiór $B = \mathbb{N} \cap \langle -1; 4)$
(A) $\{0; 1; 2; 3; 4\}$ **(B)** $\{-1; 0; 1; 2; 3\}$ **(C)** $\{0; 1; 2; 3\}$ **(D)** $(0; 4)$

h) Wyznacz zbiór $B = \{x : x \in \mathbb{C} \;\; i \;\; |x + 1| < 2\}$
(A) $\{0; 1\}$ **(B)** $\{-3; -2; -1; 0; 1\}$ **(C)** $(-3; 1)$ **(D)** $\{-2; -1; 0\}$

i) Wartość wyrażenia $\sqrt{27} + \sqrt{48} + \sqrt{75}$ jest równa:
(A) $\sqrt{150}$ **(B)** 12 **(C)** $12\sqrt{3}$ **(D)** $-5\sqrt{3}$

4.12. (R) Niech A będzie zbiorem wszystkich liczb x, które spełniają równość $|x-1|+|x-3| = 2$. Niech B będzie zbiorem wszystkich punktów na osi liczbowej, których suma odległości od punktów 4 i 6 jest niewiększa niż 4. Zaznacz na osi liczbowej zbiory A i B oraz wszystkie punkty, które należą jednocześnie do A i do B.

4.13. (R) Niech $A = \{(x, y);\; |x| + |y| \leqslant 2\}$, $B = \{(x, y);\; -1 \leqslant x \leqslant 1 \wedge 2 \leqslant y \leqslant 6\}$. Który z tych zbiorów ma większe pole?

4.14. (R) Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów, których współrzędne spełniają nierówność: $log_{\frac{1}{2}}(2 - x^2 - y^2) > -1$.

4.15. (R) Dane sa zbiory $A = \{x;\; x \in \mathbb{R} \wedge x^5 - 4x^3 - 8x^2 + 32 > 0\}$,
$B = \{x;\; x \in \mathbb{R} \wedge log_{0,1}(4 - x^2) > log_{0,1}(6x - 3)\}$. Wyznacz zbiory $A \cap B$, $A \setminus B$.

4.16. (R) Zaznacz zbiór wszystkich par (x, y) liczb rzeczywistych, dla których wyrażenie $\sqrt[4]{4 - x^2 - y^2} - \frac{1}{\sqrt{y - logx}}$ ma wartość rzeczywistą. Zbiór ten przedstaw graficznie na płaszczyźnie XOY.

4.17. (RR) W układzie wspołrzędnych zaznacz zbiór $A \cap B$, gdy: $A = \{(x, y);\; x \geqslant -2 \wedge y \leqslant 0\}$,
$B = \{(x, y);\; y^2 \leqslant |x + 1|\}$.

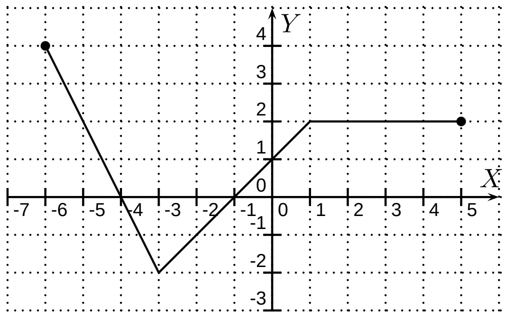
4.18. (RR) W układzie współrzędnych XOY zaznacz iloczyn kartezjański $A \times B$, gdy: $A = \{x;\; |x| \geqslant 1\}$
$B = \{y;\; |y| \leqslant 1\}$.

5 Funkcja i jej własności

5.1. Wyznacz dziedzinę i miejsca zerowe funkcji:
a) $f(x) = \frac{x^3-8}{x^2+2x+4}$ oraz sporządź wykres
b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+x-6}}$
c) $f(x) = \sqrt{2 - |x|}$
d) $f(x) = \frac{9-x^2}{3+x}$ oraz sporządź wykres
e) $f(x) = \frac{2x^2+4}{-x^2+4}$

5.2. Wyznacz wzór funkcji $g(x) = f(x-3) - 1$, gdy $f(x) = x^2$ i sporządź jej wykres.

5.3. Na podstawie wykresu funkcji ustal:
a) dziedzinę funkcji i jej zbiór wartości,
b) miejsca zerowe oraz przedziały monotoniczności,
c) argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie i ujemne.

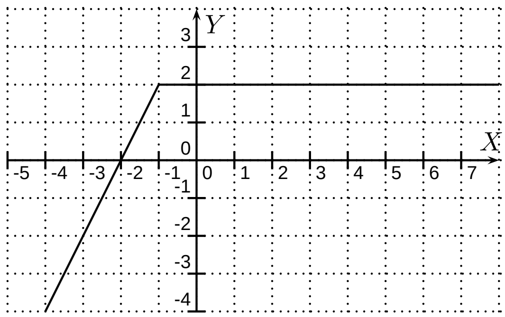


5.4. Dana jest funkcja $f(x) = NWD(x, 4)$ dla $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, gdzie zapis $NWD(x, 4)$ oznacza największy wspólny dzielnik liczb x i 4.
a) Uzupełnij tabelkę

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$								

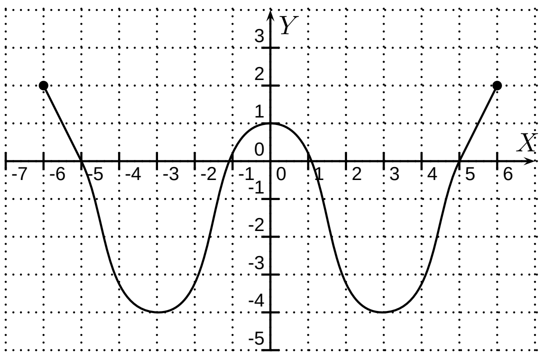
b) Naszkicuj wykres funkcji f.
c) Podaj zbiór wartości funkcji $g(x) = f(x) + 3$.

5.5. Dany jest wykres pewnej funkcji, gdzie $x \in \mathbb{R}$. Sporządź wykres funkcji:
a) $y = f(x-2) - 1$,
b) $y = -f(-x)$,
(R) **c)** $y = |f(x)|$.
Opisz przekształcenia jakie wykonałeś.



5.6. Funkcja $f(x)$ jest określona wzorem: $f(x) = \begin{cases} x+2, & dla \;\; x \in \langle -1, 1) \\ -(x-1)^2, & dla \;\; x \in \langle 1, 3 \rangle \end{cases}$
a) Sprawdź, czy liczba $a = (0,25)^{-0,5}$ należy do dziedziny funkcji $f(x)$.
b) Oblicz $f(2)$ oraz $f(3)$.
c) Sporządź wykres funkcji $f(x)$.
d) Podaj rozwiązanie równania $f(x) = 0$.
e) Zapisz zbiór wartości funkcji $f(x)$.

5.7. Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$ określonej dla $x \in \langle -6, 6 \rangle$.
Korzystając z wykresu funkcji zapisz:
a) maksymalne przedziały, w których funkcja jest rosnąca,
b) zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie,
c) największą wartość funkcji f w przedziale $\langle -5, 5 \rangle$,
d) miejsca zerowe funkcji $g(x) = f(x-1)$,
e) najmniejszą wartość funkcji $h(x) = f(x) + 2$.

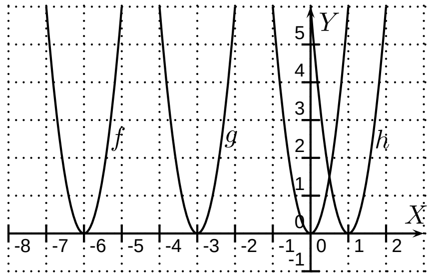


5.8. **Test wyboru.** Zaznacz poprawne odpowiedzi.

a) Dana jest funkcja $f(x) = \frac{10-x^2}{x^2-100}$.
(A) Funkcja f ma dwa miejsca zerowe.
(B) Wykres funkcji f przecina oś OY w punkcie o rzędnej dodatniej.

(C) Zbiór liczb podzielnych przez 5 jest zawarty w dziedzinie funkcji f.

b) Wykresy funkcji: f, g, h otrzymano przez odpowiednie przesunięcia wykresu funkcji $y = 6x^2$.
(A) Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = 6x^2 - 6$.
(B) Funkcja g jest określona wzorem $g(x) = 6x^2 + 36x + 54$.
(C) Wykres funkcji h przechodzi przez punkt $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.



c) Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = |x + 3| - 4$:
(A) maleje w przedziale $(-\infty; 0)$,
(B) dla $x \in (1, \infty)$ przyjmuje wartości dodatnie,
(C) przyjmuje wartość $-\pi$ dla dwóch różnych argumentów.

5.9. (R) Opisz sposób, w jaki należy przkształcić wykres funkcji $f(x) = sin3x$, aby otrzymać wykres funkcji $g(x) = sin(3x + \pi)$.

5.10. (R) Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej $n > 1$ największą liczbę całkowitą spełniającą nierówność $x^2 - 3nx + 2n^2 < 0$ o niewiadomej x. Wyznacz wzór funkcji f.

5.11. (RR) Funkcja okresowa f ma okres podstawowy 4. Naszkicuj wykres tej funkcji, jeżeli dla $x \in (-2, 0)$ określona jest wzorem $f(x) = \frac{1}{x}$.

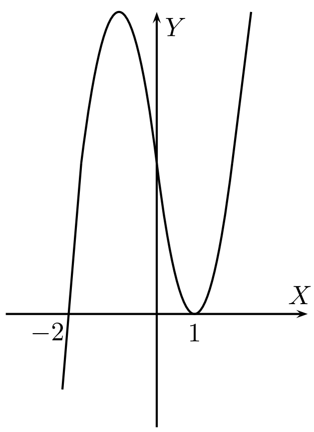
5.12. (RR) Wskaż przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = x - [x]$, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą z x.

5.13. (RR) Korzystając z definicji funkcji zbadaj monotoniczność funkcji f o wzorze $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ w zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich.

5.14. (RR) Zbadaj na podstawie definicji, czy funkcja f jest różnowartościowa:
a) $f(x) = 1 - x$
b) $f(x) = (x - 3)^2 + 1$

5.15. (RR) Zbadaj parzystość funkcji f.
a) $f(x) = x^2 \frac{3^x+1}{3^x-1}$
b) $f(x) = \frac{cosx}{tg^2x}$
c) $f(x) = \sqrt{x}$
d) $f(x) = xlog\frac{3-x}{3+x}$
e) $f(x) = |x| + x$

5.16. (RR) Rysunek przedstawia fragment wykresu pewnej funkcji wielomianowej $w(x)$ stopnia trzeciego. Jedynymi miejscami zerowymi tego wielomianu są liczby (-2) oraz 1, a pochodna $w'(-2) = 18$.
a) Wyznacz wzór wielomianu $w(x)$.
b) Wyznacz równanie prostej stycznej do wykresu tego wielomianu w punkcie o odciętej $x = 3$.



6 Funkcja linowa

6.1. Uzasadnij, że punkty: $A = (-1, 1), B = (1, 5)$ i $C = (1000, 2003)$ należą do jednej prostej.

6.2. Dana jest prosta p o równaniu $y = \frac{2}{3}x - 4$ oraz punkt $A = (4, 3)$.
a) Wyznacz równanie prostej q prostopadłej do prostej p i przechodzącej przez punkt A.
b) Wyznacz współrzędne punktu, w którym przecinają się proste p i q.
c) Oblicz pole trójkata ograniczonego tymi prostymi i osią OY.

6.3. Dana jest funkcja f o wzorze $f(x) = -3x + 3$.
a) Wyznacz wzór funkcji g, wiedząc, że jej wykres jest równoległy do wykresu funkcji f oraz przechodzi przez punkt $A = (1, 3)$.
b) Wyznacz miejsca zerowe funkcji f i g.
c) W jednym układzie współrzędnych narysuj wykresy funkcji f i g.
d) Oblicz pole figury ograniczonej wykresami funkcji f i g oraz osiami układu współrzędnych.

6.4. Liczba 3 jest miejscem zerowym funkcji $y = ax + 3$.
a) Wyznacz wzór funkcji.
b) Wykonaj wykres funkcji dla tych x, które spełniają nierówność: $\frac{x+6}{2} + \frac{6-4x}{3} > 0$.

6.5. Dana jest funkcja $f(x) = 3x + b, x \in \mathbb{R}$ oraz wiadomo, że $f(x - 2) = 3x - 5$.
a) Wyznacz współczynnik b i podaj wzór funkcji f.
b) Narysuj wykres funkcji $g(x) = f(x) + 2$ i oblicz, dla jakich argumentów wartości funkcji g są ujemne.

6.6. Punkty $A = (6, -5), B = (-1, 9), C = (-1, 3)$ i $D = (3, -5)$ są wierzchołkami trapezu $ABCD$.
a) Wyznacz równania prostych zawierających podstawy tego trapezu.
b) Uzasadnij, że prosta o równaniu $y = \frac{1}{2}x - \frac{13}{2}$ zawiera wysokość trapezu poprowadzoną z wierzchołka D.

6.7. W układzie współrzędnych są dane dwa punkty: $A = (-2, 2)$ i $B = (4, 4)$.
a) Wyznacz równanie prostej AB.
b) Prosta AB oraz prosta o równaniu $9x - 6y - 26 = 0$ przecinają się w punkcie C. Oblicz współrzędne punktu C.
c) Wyznacz równanie symetralnej odcinka AB.

6.8. Dane są proste o równaniach $2x - y - 3 = 0$ i $2x - 3y - 7 = 0$.
a) (R) Zaznacz w prostokątnym układzie współrzędnych na płaszczyźnie kąt opisany układem nierówności:
$$\begin{cases} 2x - y - 3 \leqslant 0 \\ 2x - 3y - 7 \leqslant 0 \end{cases}$$
b) Oblicz odległość punktu przecięcia się tych prostych od punktu $S = (3, -8)$.

6.9. Punkty A, B, C, D są kolejnymi wierzchołkami kwadratu. Bok BC jest zawarty w prostej o równaniu $y = -\frac{1}{2}x - 3$. Wyznacz współrzędne punktu B wiedząc, że wierzchołek A ma współrzędne $(-1, -1)$.

6.10. Do wykresu pewnej funkcji liniowej należą punkty $A = (4, m^2)$, $B = (5, 9)$. Dla jakich wartości parametru m funkcja jest malejąca, dla jaki rosnąca, a dla jakich stała?

6.11. Rozwiąż równania:
a) $\sqrt{6}z - \sqrt{3} = \sqrt{12} - \sqrt{3}z$
b) $m - (m - 1)^2 = (m + 1)(-m + 1)$
c) $10 + |1 - x| = 15$
d) $3|t + 1| = |2t + 2|$

6.12. Zebrano 6 kg świeżych grzybów zawierających 90% wody. Ile będą ważyły te grzyby po wysuszeniu, jeśli zawartość wody spadnie do 40%.

6.13. Rozwiąż nierówności, rozwiązanie przedstaw na osi liczbowej.
a) $\frac{3x-1}{2} - \frac{x+4}{3} \geqslant \frac{5x-11}{4}$
b) $5x - 2(2(3x - 1) - 3x) > 1 - 6x$
c) $|3x + 6| \leqslant 9$
d) $2|x| + 2 > |x|$
e) $|4 - \frac{1}{7}x| > \frac{1}{3}$

6.14. Rozwiąż układ równań:

a) $\begin{cases} -0,1x+0,2y=1 \\ 2y=x+1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 4x(x+5)-8x(y+3)+4y^2=4(x-y)^2 \\ 2x+3(y+1)=2 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} \frac{1}{4}x+\frac{1}{2}y=3 \\ y=-\frac{1}{2}x+6 \end{cases}$

6.15. **a)** Ojciec polecił synowi rozwiązać 17 zadań i powiedział, że za każde poprawnie rozwiązane zadanie da mu 3 złote, a za każde błednie rozwiązane zabierze mu 4 złote. Ile zadań syn rozwiązał poprawnie, jeśli od ojca otrzymał tylko 2 złote?
b) Z miasta A wyruszyły jednocześnie dwa samochody. Średnia prędkość jednego samochodu jest o $20\frac{km}{h}$ mniejsza niż drugiego. Po pewnym czasie odległość szybszego samochodu od miasta A wynosiła $80km$, a wolniejszego $60km$. Oblicz średnie prędkości samochodów.

6.16. Dwie siostry mają razem 41 lat, a ich mama jest dwa razy starsza od starszej z sióstr. Za pięć lat wszystkie razem będą miały 100 lat. Ile lat mają siostry, a ile ich mama?

6.17. **Test wyboru.** Zaznacz poprawne odpowiedzi.

a) Wykres funkcji $g(x)=-\frac{2}{3}x+4$:
(A) przechodzi przez punkt $\left(-\frac{9}{4},\frac{11}{2}\right)$,
(B) nie przechodzi przez IV ćwiartkę układu współrzędnych,
(C) przecina prostą $x-3y-15=0$ w punkcie $(9,-2)$.

b) Dana jest funkcja $f(x)=(\sqrt{2}-1)x-1$.
(A) Miejscem zerowym funkcji f jest liczba $\sqrt{2}+1$.
(B) Wykresem funkcji f jest prosta równoległa do prostej $y=\frac{x}{\sqrt{2}+1}$.
(C) Prosta prostopadła do wykresu funkcji f ma współczynnik kierunkowy równy $-1-\sqrt{2}$.

c) Do wykresu funkcji $y=(\sqrt{3}-\sqrt{2})x-1$ nie należy punkt:
(A) $(\sqrt{3}+\sqrt{2},0)$,
(B) $(\sqrt{2},\sqrt{6}-3)$,
(C) $(\sqrt{3},3-\sqrt{6})$.

d) Proste $mx-3y-15=0$ i $2x+\frac{1}{2}y+5=0$:
(A) są równoległe dla $m=12$,
(B) są prostopadłe dla $m=\frac{3}{4}$,
(C) przecinają się w punkcie $(0,5)$ dla $m=12$.

6.18. (R) Narysuj wykres funkcji f i podaj jej własności:
a) $f(x)=-|x+2|+1$
b) $f(x)=|4-2x|$

6.19. (R) Dana jest funkcja $f(x)=|x-1|-|x+2|$ dla $x\in\mathbb{R}$.
a) Wyznacz zbiór wartości funkcji f dla $x\in(-\infty,-2)$.
b) Naszkicuj wykres tej funkcji.
c) Podaj jej miejsca zerowe.
d) Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $f(x)=m$ nie ma rozwiązania.

6.20. (R) Funkcja f jest określona wzorem: $f(x)=\begin{cases} x+5, & dla\ \ x<-5 \\ -x+2, & dla\ \ -5\leqslant x<5 \\ x-6, & dla\ \ x\geqslant 5 \end{cases}$

Miejscami zerowymi tej funkcji są:
(A) $-5,2,6$
(B) $2,6$
(C) $-5,2$
(D) $-5,-2,6$

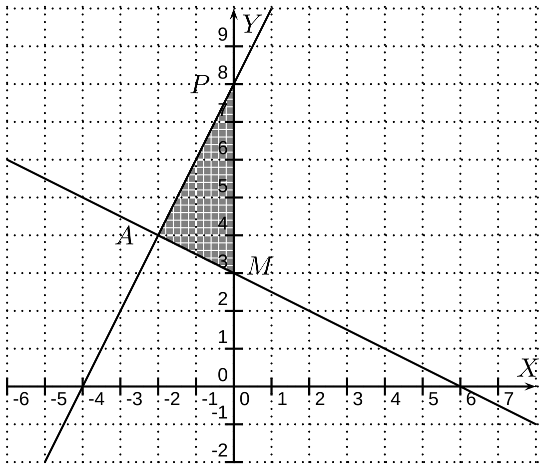
6.21. (R) Dane są funkcje liniowe g i h określone wzorami: $g(x)=ax+b$ i $h(x)=bx+a$. Wiadomo, że funkcja g jest rosnąca, a funkcja h malejąca.
a) Wyznacz pierwszą współrzędną punktu przecięcia wykresów tych funkcji.

b) Oblicz liczby a i b wiedząc, że wykresy funkcji g i h są prostymi prostopadłymi, a punkt ich przecięcia leży na osi OX.

6.22. (R) Wyznacz wszystkie wartości parametru p, dla których równanie $|x-2|+|x+3|=p$ ma dokładnie dwa rozwiązania.

6.23. (R) Oblicz pole figury wyznaczonej przez układ nierówności: $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y+x \leqslant 5 \\ 2y-x \geqslant 4. \end{cases}$

6.24. (R) Opisz za pomocą układu nierowności zbiór punktów trójkąta PAM przedstawionego na rysunku. Uzasadnij, że trójkąt PAM jest prostokątny.



6.25. (R) Rozwiąż równania i nierównośći:
a) $|x+2| = 3 - \sqrt{x^2-2x+1}$
b) $|3x+6| - |2x-2| = x+8$
c) $|m+3| + |-m+1| = 5$
d) $|2|x|+3| < 5$
e) $|t+6| + |4t+4| \geqslant 1$
f) $|3-k| < |1-k|$
g) $|x^2-1| > 1-x$ - rozwiąż graficznie.

6.26. (R) Wykresem funkcji f jest prosta przechodząca przez punkty $A=(0,3)$, $B=(-2,1)$. Wyznacz wzór funkcji f oraz rozwiąż nierówność: $f(|2x+1|) \leqslant 13-3x$.

6.27. (R) Określ liczbę rozwiązań równania z niewiadomą x, gdy:
a) $a^2x+1 = a^2+ax$
b) $(3-m)x = 4+x$

6.28. (R) Podaj dla jakiej wartości parametru m proste o równaniach $mx-(2m-3)y+3=0$, $(2m+5)x+(m+6)y-6=0$ są równoległe oraz prostopadłe.

6.29. (R) Zbadaj liczbę rozwiązań układu równań: $\begin{cases} (m-1)x-2y=m \\ -3x+my=-2 \end{cases}$ w zależności od parametru m. Dla $m=1$ rozwiąż ten układ graficznie.

6.30. (R) Dla jakich wartości parametru m rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 3x-2y=m-11 \\ x+y=2m+3 \end{cases}$ jest para liczb:
a) dodatnich,
b) ujemnych,
c) o różnych znakach ?

7 Funkcja kwadratowa

7.1. Dana jest funkcja $f(x) = -x^2+6x-5$.
a) Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej zbiór wartości.
b) Podaj rozwiązanie nierówności $f(x) \geqslant 0$.

7.2. Funkcja kwadratowa $y=f(x)$ osiąga największą wartość równą 6 dla argumentu $x=2$. Znajdź wzór tej funkcji, wiedząc, że $x=-1$ to jedno z miejsc zerowych tej funkcji.

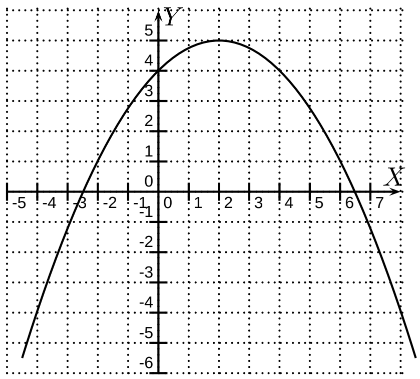
7.3. Wiedząc, że liczba 2 jest miejscem zerowym funkcji kwadratowej $f(x)=x^2+bx-12$, wyznacz współczynnik b oraz drugie miejsce zerowe tej funkcji. Przedstaw wzór funkcji w postaci kanonicznej i iloczynowej.

7.4. **a)** Wyznacz współczynnik b tak, aby przedział $\langle -8, \infty)$ był zbiorem wartości funkcji $f(x)=x^2+bx+1$.
b) Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x)=(1-x)(x+1)+2x$. Wyznacz zbiór wartości funkcji f.

7.5. Zbiorem wartości funkcji kwadratowej g jest przedział $(-\infty, 5\rangle$, a zbiorem rozwiązań nierówności $g(x) > 0$ jest przedział $(2, 8)$. Wyznacz wzór funkcji g.

7.6. Dla każdej liczby rzeczywistej b równanie $y = \frac{1}{2}x^2 - bx + 2$ opisuje pewną parabolę. Wyznacz wszystkie wartości parametru b, dla których wierzchołek paraboli leży nad osią OX.

7.7. Pewna parabola o wierzchołku $W = (2, 5)$ przecina oś w punkcie $A = (0, 4)$. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej, której wykresem jest parabola. Wyznacz miejsca zerowe tej funkcji.



7.8. Wyznacz współczynniki b i c trójmianu $y = x^2 + bx + c$, jeśli spełniony jest warunek:
a) trójmian osiąga najmniejszą wartość równą 7 dla $x = -1$,
b) trójmian przyjmuje wartości ujemne tylko dla $x \in (-1, 4)$,
c) wykres trójmianu jest symetryczny względem prostej $x = 3$ i przecina oś OY w punkcie $(0, 5)$.

7.9. Znajdź wzór funkcji kwadratowej $y = f(x)$, której wykresem jest parabola o wierzchołku $(1, -9)$ przechodząca przez punkt o współrzędnych $(2, -8)$. Otrzymaną funkcję przedstaw w postaci kanonicznej. Oblicz jej miejsca zerowe i naszkicuj wykres.

7.10. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji w podanym przedziale:
a) $f(x) = x^2 - 2x, \quad x \in \langle -1, 3\rangle$,
b) $f(x) = x^2 + 4x + 4, \quad x \in \langle -4, -3\rangle$,
c) $f(x) = 2x^2 - 4x + 11, \quad x \in \langle 0, 4\rangle$.

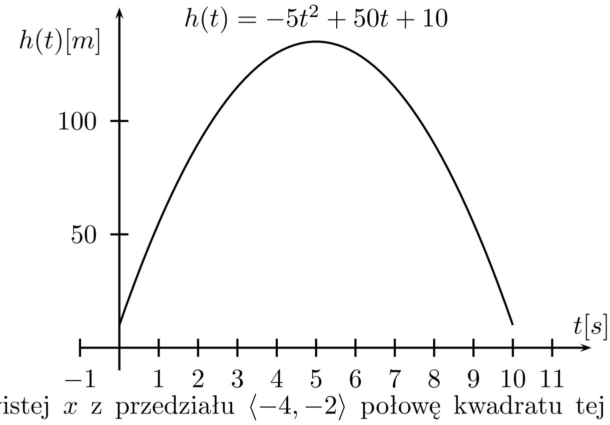
7.11. Funkcja kwadrtowa f określona wzorem: $f(x) = ax^2 + bx + c$ ma jedno miejsce zerowe oraz do jej wykresu należą punkty $A = (0, 1)$ i $B = (2, 9)$.
a) Wyznacz wartości współczynników a, b i c.
b) Oblicz miejsca zerowe funkcji f.
c) Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji.

7.12. Jednym z miejsc zerowych funkcji kwadratowej f jest liczba 5, maksymalny przedział, w którym ta funkcja jest malejąca to $\langle 2, +\infty)$. Największa wartość funkcji f w przedziale $\langle -8, -7\rangle$ jest równa (-24). Wyznacz wzór funkcji f i narysuj jej wykres.

7.13. Podaj miejsca zerowe funkcji określonych dla wszystkich liczb rzeczywistych x :
$f(x) = x(x + 2)$, $g(x) = (x - 5)(x + 2)$, $h(x) = (5 - 2x)(2x + 1)$.

7.14. Druga współrzędna punktu M należącego do wykresu funkcji określonej wzorem $y = x^2 - x + 1$ jest mniejsza od $9^{\frac{1}{2}}$. Podaj największy przedział, do którego należy pierwsza współrzędna.

7.15. Pocisk wystrzelony pionowo w górę, po osiągnięciu maksymalnego punktu toru, spada w dół. Funkcja $h(t) = -5t^2 + 50t + 10$ przyporządkowuje czasowi t (w sekundach) lotu wysokość h (w metrach), na której znajduje się pocisk. Oblicz maksymalną wysokość, na której znajdował się pocisk.



7.16. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie rzeczywistej x z przedziału $\langle -4, -2\rangle$ połowę kwadratu tej liczby pomniejszoną o 8.
a) Podaj wzór tej funkcji.
b) Wyznacz najmniejszą wartość funkcji f w podanym przedziale.

7.17. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie dodatniej x różnicę liczb wyrażających pole kwadratu o boku x i długości przekątnej tego kwadratu.

a) Podaj wzór funkcji f i narysuj jej wykres.
b) Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji f w przedziale $\langle \frac{\sqrt{2}}{4}, 2\sqrt{2}\rangle$.

7.18. W roku 2005 na uroczystości urodzin zapytano jubilata, ile ma lat. Jubilat odpowiedział: „Jeśli swój wiek sprzed 10 lat pomnożę przez swój wiek za 11 lat, to otrzymam rok mojego urodzenia". Ułóż odpowiednie równanie, rozwiąż je i zapisz, w którym roku urodził się ten jubilat.

7.19. Samochód przebył w pewnym czasie 210 km. Gdyby jechał ze średnią prędkością o 10 km/h większą, to czas przejazdu skróciłby się o pół godziny. Oblicz, z jaką średnią prędkością jechał ten samochód.

7.20. Sklep sprowadza z hurtowni kurtki płacąc po 100 zł za sztukę i sprzedaje średnio 40 sztuk miesięcznie po 160 zł. Zaobserwowano, że każda kolejna obniżka ceny sprzedaży kurtki o 1 zł zwiększa sprzedaż miesięczną o 1 sztukę. Jaką cenę kurtki powinien ustalić sprzedawca, aby jego miesięczny zysk był największy?

7.21. Funkcja kwadratowa $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ przyjmuje jednakowe wartości dla argumentów 1 i 5. Do wykresu tej funkcji należy początek układu współrzędnych.
a) Wyznacz wartości współczynników b i c.
b) Dla wyznaczonych wartości współczynników b i c naszkicuj wykres funkcji f.

7.22. Wykaż, że dla $m = 3$ nierówność $x^2 + (2m - 3)x + 2m + 5 > 0$ jest spełniona przez wszystkie liczby rzeczywiste x.

7.23. Wyznacz dziedziny funkcji: $f(x) = \sqrt{(1-x)(3-x)}$ oraz $g(x) = \sqrt{1-x} \cdot \sqrt{3-x}$. Sprawdź, czy te dziedziny są równe.

7.24. **a)** Liczbę 42 przedstaw w postaci sumy dwóch składników tak, by różnica ich kwadratów była równa 168.
b) Jeżeli odejmiemy od danej liczby jej odwrotność, to otrzymamy $\frac{9}{20}$. Jaka to liczba?
c) Kwadrat piątej części stada małp zmniejszonej o 3 schował się w jaskini. Została na widoku jedna małpa, która weszła na drzewo. Ile było małp?
d) Znajdź trzy kolejne liczby parzyste tak, aby suma kwadratów dwóch mniejszych liczb była równa kwadratowi trzeciej liczby.

7.25. Rozwiąż układy nierówności:

a) $\begin{cases} |x+4| \geqslant 2 \\ -5(x-1) > x(x-1) \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} (2x+1)^2 - 2x^2 - 10x \geqslant 5 + (x-1)^2 \\ 2 - \frac{2x+5}{2} < \frac{1-2x}{4} \end{cases}$

7.26. **Test wyboru.** Zaznacz poprawne odpowiedzi.

a) Najmniejsza wartość funkcji f jest liczbą dodatnią dla:
(A) $f(x) = x^2 - 2x + 2$,
(B) $f(x) = 3x^2 + 6x + 1$,
(C) $f(x) = (x - 19)^2 - \frac{1}{4}$.

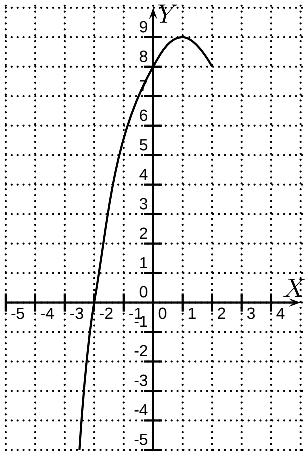
b) Miejscami zerowymi funkcji $y = 4x^2 + bx + c$ są liczby 5 i -3, zatem:
(A) $b = 2$ i $c = -8$,
(B) $b = -2$ i $c = -15$,
(C) $b = -8$ i $c = -60$.

c) Równanie $2x^2 + 3x + m = 0$ nie ma rozwiązań wtedy i tylko wtedy, gdy:
(A) $m < \frac{9}{8}$,
(B) $m \in \left(\frac{9}{8}, \infty\right)$,
(C) $m > 1,125$.

d) $\mathbb{R}$ jest zbiorem rozwiązań nierówności:
(A) $5x^2 + 4x + 1 \geqslant 0$,
(B) $-4x^2 - 1 < 0$,
(C) $x^2 + 3 > 0$.

e) Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności $x^2 > 4$ jest:
(A) $(2;\infty)$,
(B) $(-2,2)$,
(C) $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$

f) Na podstawie fragmentu wykresu funkcji kwadratowej $f(x)$ wskaż, które zdanie jest prawdziwe.
(A) Miejscami zerowymi funkcji są liczby: -2 oraz 4.
(B) Funkcja jest rosnąca w przedziale $(-2,4)$.
(C) Funkcja przyjmuje wartości większe od zera dla $x<1$.
(D) Zbiorem wartości funkcji jest przedział $(-\infty,9)$.

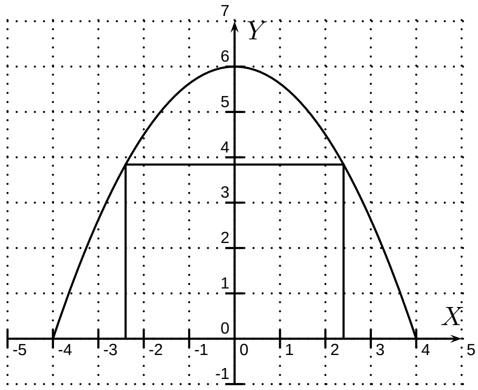


7.27. (R) Rozwiąż równania:
a) $x^4-3(x^2-1)=7(x^2-3)$
b) $\sqrt{x-1}=x-3$
c) $|x|+|1-x^2|=1$
d) $|x^2+4x-5|+|x^2+4x|=5$.

7.28. (R) Rozwiąż nierówność:
a) $5\sqrt{x-3}>x+1$
b) $|4x^2-4x+3|<2$
c) $(|x|-2)^2\leqslant 1$
d) $|x|+|x-2|\geqslant x^2-2x+1$.

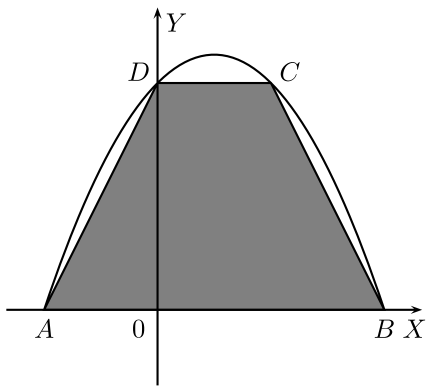
7.29. (R) W pewnej klasie było 21 uczniów. Klasa podzieliła się na dwie grupy. Każdy uczeń z okazji zakończenia roku szkolnego podarował upominek wszystkim pozostałym kolegom ze swojej grupy. Jakie liczne byly grupy, jezeli liczba upominków była najmniejsza z możliwych.

7.30. (R) Jednokierunkowa droga o szerokości 8 m prowadzi przez tunel. Przekrój poprzeczny tunelu, przedstawiony na rysunku, ma kształt zbliżony do łuku paraboli o równaniu: $y=-\frac{3}{8}x^2+6$. Sprawdź, wykonując odpowiednie obliczenia, czy ciężarówka wioząca prostopadłościenny kontener o szerokości 4,8 m może przejechać tym tunelem, jeżeli najwyższy punkt kontenera znajduje się 4 m nad drogą.



7.31. (R) Wierzchołki trójkąta równobocznego ABC są punktami paraboli $y=-x^2+6x$. Punkt C jest jej wierzchołkiem, a bok AB jest równoległy do osi OX. Sporządź rysunek w układzie współrzędnych i wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta.

7.32. (R) Podstawa AB trapezu $ABCD$ jest zawarta w osi OX, wierzchołek D jest punktem przecięcia paraboli o równaniu $y = -\frac{1}{3}x^2 + x + 6$ z osią OY. Pozostałe wierzchołki trapezu również leżą na tej paraboli (patrz rysunek). Oblicz pole tego trapezu.



7.33. (R) Sporządź wykres funkcji f danej wzorem $f(x) = 2|x| - x^2$, a następnie, korzystając z niego, podaj wszystkie wartości x, dla których funkcja f przyjmuje maksima lokalne i wszystkie wartości x, dla których przyjmuje minima lokalne.

7.34. (R) Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$.
a) Narysuj wykres funkcji f w przedziale $\langle -4, 3)$.
b) Narysuj wykres funkcji $g(x) = \frac{|f(x)|}{f(x)}$, której dziedziną jest zbiór $(-5, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, 5)$.
c) Zapisz zbiór rozwiązań nierówności $g(x) < 0$.

7.35. (R) Dane jest równanie $x^2 + bx + c = 0$ z niewiadomą x. Wyznacz wartości b oraz c tak, by były one rozwiązaniami danego równania.

7.36. (R) Dane jest równanie $x^2 + mx + m - 1 = 0$ z niewiadomą x. Uzasadnij, że dla każdej liczby całkowitej m wszystkie rozwiązania tego równania są liczbami całkowitymi.

7.37. (R) Dane jest równanie $x^2 + (3m - 2)x = -m - 2$ z niewiadomą x. Sformułuj warunki, jakie powinien spełniać parametr m, by to równanie miało dwa różne pierwiastki, których suma odwrotności jest dodatnia.

7.38. (R) Wyznacz wszystkie liczby całkowite k, dla których funkcja $f(x) = x^2 - 2^k \cdot x + 2^k + \frac{5}{4}$ przyjmuje wartości dodatnie dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

7.39. (R) Wyznacz wartości parametru a, dla których równanie $ax^2 - (a+2)x + a + 2 = 0$ ma różne pierwiastki dodatnie.

7.40. (R) Wyznacz takie wartości parametru m, dla których rozwiązania x_1 i x_2 równania $x^2 + 13x - 24 = (10 - m)x - 15$, spełniają warunek

$$x_1^2 + x_2^2 = -3x_1x_2.$$

7.41. (R) Dla jakich wartości parametru m równanie: $-x^2 + 4x = m$ ma dwa pierwiastki, z których każdy jest większy od 1.

7.42. (R) Jaki prostokąt o obwodzie równym 10 cm ma najkrótszą przekątną.

7.43. (R) Dla jakich wartości parametru $m \in \mathbb{C}$, pierwiastki funkcji kwadratowej zadanej wzorem $f(x) = x^2 - 3x + m + 1$ spełniają nierówność:

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} > 1?$$

7.44. (R) Dla jakich wartości parametru k rozwiązania równania $x^2 - (k+1)x + \frac{6k}{5} = 0$ są równe sinusowi i cosinusowi tego samego kąta?

8 Układy równań i nierówności stopnia drugiego

8.1. Wyznacz na osi OX punkt o nieujemnych współrzędnych odległy o 3 od początku przecięcia się prostych $y = 3x - 2$ i $y = -x + 2$

8.2. Wyznacz tak parametry a i b, aby proste $l:\ (2a+1)x - by = 0$ i $k:\ (3a-5)x - 2by - 7 = 0$ przecinały się w punkcie $P = (1, -1)$.

8.3. **a)** Znajdź współrzędne punktów przecięcia się paraboli i prostej o podanych równaniach: $y = x^2 - 6x + 8$, $y - x = 2$.

b) Wyznacz współrzędne punktów wspólnych prostej $y = 2x+1$ oraz hiperboli $y = \frac{1}{x}$. Wykonaj ilustrację graficzną.

c) Wyznacz współrzędne punktów wspólnych prostej $-x + y - 2 = 0$ oraz okręgu $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 9$. Wykonaj interpretację graficzną.

8.4. Ile punktów wspólnych ma okrąg o równaniu $x^2 + (y-3)^2 = 6$ z prostą o równaniu $3x + y - 15 = 0$?

8.5. Oblicz długości boków prostokąta, którego pole jest równe $25cm^2$, a obwód $25cm$.

8.6. **Test wyboru.** Zaznacz poprawne odpowiedzi.

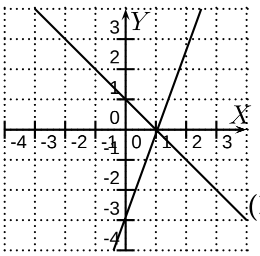
a) Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} \frac{x+y}{5} + \frac{y}{5} = -2 \\ \frac{2x-y}{3} - \frac{3x}{4} = \frac{3}{2} \end{cases}$ jest:

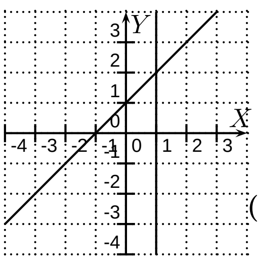
(A) $(2, -4)$ **(B)** $(-2, 4)$ **(C)** $(-2, -4)$ **(D)** $(0, -4)$

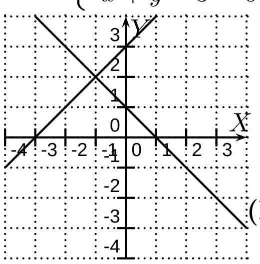
b) Spośród zapisanych niżej układów równań wskaż układ nieoznaczony:

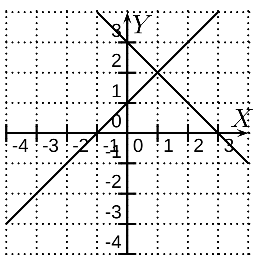
(A) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ **(B)** $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$ **(C)** $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ **(D)** $\begin{cases} 3x + 6y = 6 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$

c) Który z rysunków jest ilustracją graficzną układu równań $\begin{cases} y - x - 1 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$?

(A)


(B)


(C)


(D)


d) Prosta dana równaniem $2x + y = 3$ i parabola $y - x^2 + 1 = 0$ mają:

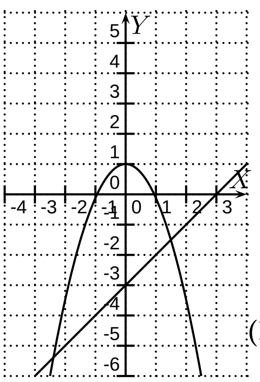
(A) 1 punkt wspólny

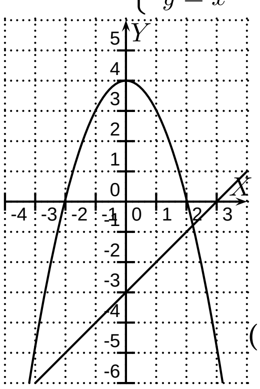
(B) 2 punkty wspólne

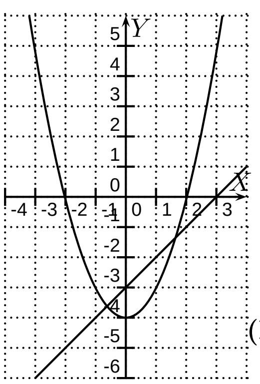
(C) 3 punkty wspólne

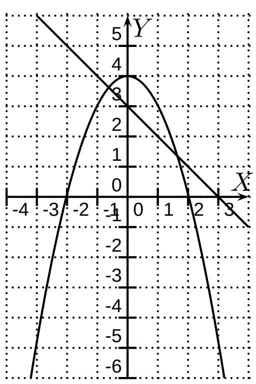
(D) 0 punktów wspólnych

e) Wskaż interpretację graficzną układu $\begin{cases} y = -x^2 + 4 \\ y = x - 3 \end{cases}$

(A)


(B)


(C)


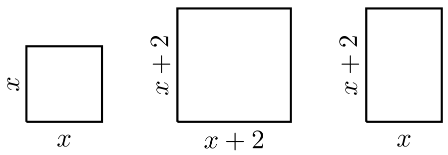
(D)


f) Dany jest okrąg $(x-3)^2+(y+3)^2=9$.Które zdania są prawdziwe?
I Okrąg ten jest styczny do obydwu osi układu współrzędnych.
II Prosta $x=6$ jest styczna do tego okręgu.
III Prosta $y=x$ nie ma punktów wspólnych z tym okręgiem.
IV Punkt $P=(3,3)$ leży na tym okręgu.
(A) tylko **I** i **III** **(B)** tylko **I**, **II** i **III** **(C)** tylko **II** i **III** **(D)** wszystkie

8.7. (R) Rozwiąż algebraicznie i graficznie układy równań:
a) $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ y=x^2-13 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x^2+y^2=58 \\ xy=-21 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 4x^2=9y^2 \\ 2x+3y=0 \end{cases}$

8.8. (R) Rozwiąż graficznie układy nierówności:
a) $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 9 \\ x+y>1 \\ x-y\leqslant 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} xy\leqslant 1 \\ x^2+y^2\geqslant 4 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 4 \\ y\leqslant x^2-2 \end{cases}$

8.9. (R) Z trzech arkuszy blachy dwa mają kształt kwadratu, a trzeci prostokąta. Długść boku jednego z kwadratów jest o 2 m większa od długości boku drugiego kwadratu. Wymiary prostokąta są odpowiednio równe wymiarom kwadratów. Ile kosztuje jeden metr kwadratowy blachy, jeżeli za pierwsze dwa arkusze w kształcie kwadratów zapłacono łącznie 68 zł, a za trzeci w kształcie prostokąta 30 zł.



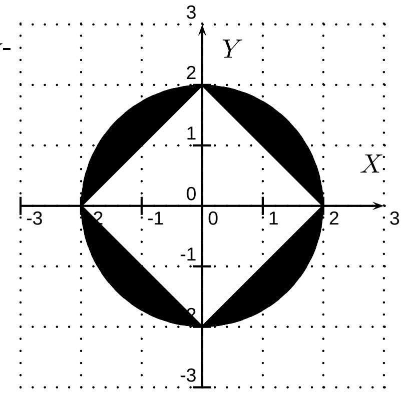
8.10. (R) Rozwiąż układ równań, podaj jego interpretację geometryczną: $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ x^2+y^2-2x-2y-3=0 \end{cases}$

8.11. (R) Wyznacz równanie okręgu o środku $S=(3,1)$ stycznego do okręgu o równaniu $x^2+y^2+2x-2y+1=0$.

8.12. (R)Dane jest równanie okręgu $x^2+y^2=4$.
a) Ile punktów wspólnych ma ten okrąg z prostą o równaniu $y=2x-5$?
b) Dla jakich wartości współczynnika b prosta $y=2x+b$ i okrąg mają dwa punkty wspólne? Wykonaj ilustrację graficzną.

8.13. (R) Dla jakich wartości paramateru a prosta o równaniu $y=ax$ jest styczna do okręgu opisanego równaniem:
$(x-3)^2+(y+1)^2=1$.

8.14. (R) Za pomocą układu nierówności opisz zacieniowany na rysunku zbiór punktów.



9 Wielomiany

9.1. **a)** Sprawdź, czy wielomian $w(x)=8x^3-27$ jest równy wielomianowi $p(x)=(2x+3)(4x^2-6x+9)$.
b) Wyznacz współczynniki a,b wielomianu $w(x)=x^3-ax^2-2x+b$, gdy $w(1)=3$ i $w(0)=-2$.
c) Rozłóż wielomian na czynniki:
$p(x)=(2x-4)^3-(x-2)^3$
$g(x)=-5x^5+30x^4-45x^3$
$z(x)=x^4-3x^3+8x-24$

9.2. Wielomian $P(x) = x^3 - 21x + 20$ rozłóż na czynniki liniowe, to znaczy zapisz go w postaci iloczynu trzech wielomianów stopnia pierwszego.

9.3. Pierwiastkiem równania $2x^3 - (3m - 1)x^2 + 7x - m = 0$ jest liczba -1. Wyznacz wartość parametru m oraz pozostałe pierwiastki tego równania.

9.4. Dany jest wielomian $W(x) = 2x^3 + ax^2 - 14x + b$.
a) Dla $a = 0$ i $b = 0$ otrzymamy wielomian $W(x) = 2x^3 - 14x$. Rozwiąż równanie $2x^3 - 14x = 0$.
b) Dobierz wartości a i b tak, aby pierwiastkami wielomianu $W(x)$ były liczby 2 i (-3).

9.5. Liczby 3 i (-1) są pierwiastkami wielomianu $W(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 30$.
a) Wyznacz wartości współczynników a i b.
b) Oblicz trzeci pierwiastek tego wielomianu.

9.6. Dane są przedziały $(-\infty, m^3+3\rangle$ i $\langle 3m^2+m, \infty)$, gdzie $m \in \mathbb{R}$. Wyznacz wszystkie wartości m, dla których część wspólna tych przedziałów jest zbiorem jednoelementowym.

9.7. Liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego o ilorazie -2. Wartość wielomianu $w(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ dla argumentu 2 jest równa 4.
a) Oblicz $w(-3)$.
b) Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $w(x)$ przez dwumian $x + 1$.

9.8. Dane są wielomiany: $Q(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 9$, $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$. Oblicz wartości m i n, dla których wielomian $W(x) = x^4 + (m-4)x^3 - (2n+6)x^2 - 38x - 3$ równy jest wielomianowi $Q(x) - 2P(x)$.

9.9. Pierwiastkiem równania $2x^3 - (3m - 1)x^2 + 7x - m = 0$ jest liczba (-1). Wyznacz wartość parametru m oraz pozostałe pierwiastki tego równania.

9.10. Dany jest wielomian $W(x) = x^3 + kx^2 - 4$.
a) Wyznacz współczynnik k tego wielomianu wiedząc, że pierwiastkiem wielomianu jest liczba (-2).
b) Dla wyznaczonej wartości k rozłóż wielomian na czynniki i podaj wszystkie jego pierwiastki.

9.11. Dany jest wielomian $w(x) = 2x^4 - ax^3 - bx^2 - cx + 3$.
a) Wyznacz współczynniki tego wielomianu wiedząc, że c, a, b są trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego o ilorazie $q = 3$, liczba -1 jest pierwiastkiem tego wielomianu.
b) (R) Rozwiąż $w(x) \leqslant 0$.

9.12. Wyznacz najmniejszą wartość wyrażenia $x^3 + y^3$ wiedząc, że $x + y = 2$.

9.13. Rozwiąż równanie:
a) $x^3 - x = x^2 - 1$
b) $27x^7 = -8x^4$
c) $2x^3 + x^2 - 13x + 6 = 0$

9.14. Rozwiąż nierówność:
a) $-3x^2(x + 2)(x^2 + 1)(x + 1)^2 < 0$
b) $x^3 \geqslant 81x$
c) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 < 0$

9.15. **Test wyboru.** Zaznacz poprawne odpowiedzi.

a) Wielomian $W(x) = (a^2 - 5a - 6)x^3 + 3x^2 - 8x + 6$ jest wielomianem stopnia drugiego dla:
(A) $a \in \mathbb{R}$ **(B)** $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ **(C)** $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 6\}$ **(D)** $a \in \{-1; 6\}$

b) Liczba -1 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6$.
(R) Pozostałe pierwiastki tego wielomianu to:
(A) $2, 3$ **(B)** $6, 1$ **(C)** $-2, -3$ **(D)** $-1; 6$

c) Wskaż zbiór rozwiązań równania $x^4 + 3x^3 - x - 3 = 0$:
(A) $\{-1; 3\}$ **(B)** $\{1; -3\}$ **(C)** $\{-3; -1; 1; 3\}$ **(D)** $\emptyset$

d) Wskaż zbiór rozwiązań nierówności $x(x+2)(1-x)(3+x) > 0$:
(A) $(-3;-2)\cup(0;1)$ **(B)** $(-\infty;-3)\cup(-2;0)\cup(1;\infty)$ **(C)** $(-\infty;-3)\cup(-2;1)$ **(D)** $(-3;-2)\cup(1;\infty)$

e) Wyznacz zbiór rozwiązań nierówności $(x^2-9)(x+3)(x^2+4x+3) \geqslant 0$:
(A) $\langle -3;-1\rangle \cup \langle 3;\infty)$ **(B)** $\langle -3;-1\rangle \cup \{3\}$ **(C)** $(-\infty;-3\rangle \cup \langle -1;\infty)$ **(D)** $(-\infty;-3\rangle \cup \langle -1;3\rangle$

f) Dany jest wielomian $W(x) = x^4 + 9$. Wskaż zdania prawdziwe:
(A) Wielomianu $W(x)$ nie można rozłożyć na czynniki.
(B) Wielomian $W(x)$ po rozkładzie na czynniki ma postać $(x-3)(x+3)(x^2+1)$
(C) Wielomian $W(x)$ po rozkładzie na czynniki ma postać $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^2+3)$
(D) Wielomian $W(x)$ po rozkładzie na czynniki ma postać $(x^2-\sqrt{6}x+3)(x^2+\sqrt{6}x+3)$

9.16. (R) Wykonaj dzielenie wielomianu $w(x) = -3x^4 + 5x^3 + x^2 + 10x + 6$ przez $q(x) = x^2 + 2$ i zapisz go w postaci $w(x) = p(x)q(x) + r(x)$.

9.17. (R) W wyniku dzielenia wielomianu $w(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 1$ przez wielomian $p(x)$ otrzymano iloraz $q(x) = x^2 - 3x + 2$ i resztę $r(x) = -1$. Wyznacz wielomian $p(x)$.

9.18. (R) Nie wykonując dzielenia wielomianów:
a) wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $w(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ przez wielomian $q(x) = x - \sqrt{2}$.
b) sprawdź, czy wielomian $w(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6$ jest podzielny przez wielomian $p(x) = x^2 - 3x + 2$.

9.19. (R) Dla jakich wartości parametru a wielomian $w(x) = a^2x^3 - 4ax + 5$ jest podzielny przez dwumian $q(x) = x + 1$.

9.20. (R) Niech $w(x) = 2x^3 - 9x^2 - 38x + 21$.
a) Wykaż, że $(x+3)$ jest dzielnikiem wielomianu $w(x)$.
b) Wielomian $w(x)$ rozłóż na iloczyn czynników liniowych o współczynnikach całkowitych.

9.21. (R) Wiedząc, że liczby 1 i 4 są pierwiastkami wielomianu $w(x) = x^4 + mx^3 + 9x^2 + 38x + n$ znajdź pozostałe pierwiastki i rozwiąż nierówność $w(x) < 0$.

9.22. (R) **a)** Dany jest wielomian $w(x)$. Wiedząc, że reszta z dzielenia tego wielomianu przez $(x+1)$ wynosi 2, przez $(x-8)$ wynosi -7, podaj wielomian, który jest resztą z dzielenia $w(x)$ przez $(x+1)(x-8)$.
(R) **b)** Suma długości wszystkich krawędzi graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 40 cm. Krawędź podstawy ma długość x. Napisz wzór funkcji opisującej objętość tego graniastosłupa w zależności od x. Jakie są wymiary tego graniastosłupa, jeśli jego objętość jest równa 36 cm^3?

9.23. (R) Wielomian $W(x) = -2x^4 + 5x^3 + 9x^2 - 15x - 9$ jest podzielny przez dwumian $(2x+1)$. Wyznacz pierwiastki tego wielomianu.

9.24. (R) Wyznacz wartości parametrów p, q, dla których liczba -1 jest dwukrotnym pierwiastkiem równania $x^3 + px^2 + qx - 2 = 0$.

9.25. (R) Wyznacz wszystkie wartości $k \in \mathbb{R}$, dla których pierwiastki wielomianu $W(x) = (x^2 - 8x + 12) \cdot (x - k)$ są trzema trzema kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu geometrycznego.

9.26. (R) Dla jakich wartości parametru m reszta z dzielenia wielomianu $x^{17} - mx^{15} + (m-2)x^{10} + 2x + m^2 - 2$ przez dwumian $(x-1)$ jest równa 3?

9.27. (R) Przedstaw wielomian $W(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ w postaci iloczynu dwóch wielomianów stopnia drugiego o współczynnikach całkowitych i takich, że współczynniki przy drugich potęgach są równe jeden.

9.28. (R) Wyznacz wszystkie liczby całkowite dodatnie spełniające nierówność: $x^3 + 90 \leqslant 2(x+5)^2$.

9.29. (R) Rozwiąż nierówność: $x^3 - x^2 + 6|x-1| \leqslant 0$.

9.30. (R) Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \frac{1}{\sqrt{18x^3 - 3x^2 - 4x + 1}}$.

9.31. (R) Funkcja $w(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ osiąga ekstremum $y = -4$ dla $x = 1$. Wyznacz współczynniki a, b, c tej funkcji wiedząc, że do jej wykresu należy punkt $B = (0, -2)$. Rozwiąż nierówność $w(x) \geqslant 0$.

9.32. (R) Dla jakich wartości parametru m wielomian $w(x) = x^3log^2m - 3x^2logm - 6x - 2logm$ jest podzielny przez $(x+1)$.

9.33. (R) Wiedząc, że $f(x) = x^5 + x^3$ rozwiąż nierówność $f'(2x) + f''(x) \geqslant 6x$.

10 Funkcje wymierne

10.1. Wykonaj działania i oblicz wartość wyrażenia $\left\{\left[\left(\frac{1}{2}x^{-2}y\right)^3 : \left(\frac{8}{y^2}\right)^{-1}\right] \cdot \left(-\frac{1}{4}xy^3\right)\right\} : (\sqrt{2}x^{-2}y)^2$ dla
$x = -0,375$,
$y = 2\sqrt{3}$.

10.2. Wiadomo, że $\frac{x+2y}{x-2y} = 7$. Oblicz $\frac{x+3y}{x-3y}$.

10.3. Uprość wyrażenie: $\left(\frac{x}{x-y} - \frac{x}{x+y}\right)\frac{x^2+xy}{x^2y^2}$.

10.4. Dane są wyrażenia $u = \frac{3x^2+12x}{(x-1)(x+4)}$ i $w = \frac{x^2-x-2}{x^2+2x+1}$.

a) Wyznacz dziedzinę każdego z nich.

b) Skróć ułamki u i w.

c) Zapisz $u + w$ w postaci ułamka.

10.5. Podaj dziedzinę funkcji i sprowadź ją do najprostszej postaci:
a) $f(x) = \frac{x^3-2x^2+4x-8}{x^4-16}$
b) $f(x) = \frac{(x^3-1)(x^2-4)}{(x^2+x-2)(x-2)}$

10.6. Wyznacz tak parametry a i b, aby do wykresu funkcji $y = \frac{ax+b}{x+5}$ należały punkty $A = (-4, 6)$, $B = (-6, -12)$. Znajdź miejsca zerowe tej funkcji.

10.7. Do wykresu funkcji $f(x) = \frac{2}{x}$ i $g(x) = \frac{3}{x-1}$ należy punkt $A = (x_0, y_0)$. Wyznacz współrzędne tego punktu. Wyznacz parametr a, aby ten punkt należał też do hiperboli o równaniu $h(x) = \frac{x+a}{x+4}$.

10.8. Wyznacz wszystkie wartości zmiennej x, dla których wartości funkcji $f(x) = \frac{3}{x-1}$ są równe wartościom funkcji $g(x) = \frac{4}{x+4}$.

10.9. Wykresy funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ i $g(x) = \frac{1}{k-1}x$ przecinają się w punkcie, którego rzędna równa się $\frac{1}{3}$.
a) Oblicz odciętą punktu przecięcia wykresów.
b) Oblicz k.
c) Dla obliczonego k rozwiąż równanie $\frac{1}{4}f(x) = g(x)$.

10.10. Iloczyn liczb x i y jest równy połowie ich sumy. Wyznacz liczbę y jako funkcję liczby x dla $x \neq \frac{1}{2}$.

10.11. Dane jest równanie $-x + xy - y - 3 = 0$. Wyznacz y w zależności od x. Ustal warunki istnienia takiej zależności oraz x, dla którego y przyjmuje wartość 5.

10.12. **a)** Odległość między dwiema przystaniami położonymi na rzece wynosi 8 km. Łódka przepływa tę drogę w obie strony w czasie 1 h i 40 minut. Oblicz prędkość łódki na wodzie stojącej, jeśli wiadomo, że prędkość prądu rzeki wynosi $2\frac{km}{h}$.
b) Dwie maszyny, pracując równocześnie, wykonują pewną pracę przez 8 godzin. Gdyby pracowała tylko pierwsza z nich, to wykonywałaby tę pracę przez 24 godziny. Ile czasu wykonywałaby tę pracę tylko druga maszyna?

10.13. Wykonaj działania, określ dzidzinę:

a) $\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3-8} \cdot \frac{x^2-4}{x^2-2x+1}$

b) $\frac{x+1}{x-1} : \frac{x^2+x}{3x-3}$

c) $\frac{x+3}{x-3} + \frac{x-3}{x+3} - \frac{x^2+9}{x^2-9}$

d) $\left(x - \frac{x-2}{1+2x}\right) : \left(1 + \frac{x(x-2)}{1+2x}\right)$

10.14. Rozwiąż równania:

a) $x+1=\frac{2}{x}$

b) $\frac{2x-3}{x-3}=3$

c) $\frac{x}{x+1}=\frac{2x}{x-1}$

d) $\frac{2x+5}{x+1}=\frac{2}{x}$

10.15. **Test wyboru.** Zaznacz poprawne odpowiedzi.

a) Dziedziną funkcji $F(x)=\frac{3x-1}{x^3+2x^2-4x-8}$ jest zbiór:

(A) $\{-2;2\}$ **(B)** $\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$ **(C)** $\mathbb{R}$ **(D)** $\langle -2,2\rangle$

b) Miejscami zerowymi funkcji $F(x)=\frac{x^3-13x+12}{x+4}$ są liczby:

(A) $-4,1,3$ **(B)** $-3,1,4$ **(C)** $3,1$ **(D)** -4

c) Rozwiązaniem równania $\frac{2x+5}{x+1}=\frac{2}{x}$ jest:

(A) $\{-1;0\}$ **(B)** $\{-2;-1;0;0,5\}$ **(C)** $\{-2;0,5\}$ **(D)** $\{-2,-1\}$

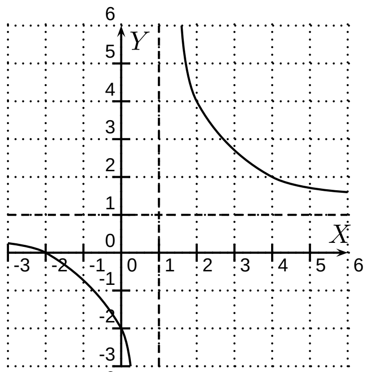
d) Przesuwając wykres funkcji $y=\frac{-2}{x}$ równolegle do osi OX w prawo o 5 jednostek oraz równolegle do osi OY w dół o 3 jednostki, otrzymasz wykres funkcji:

(A) $g(x)=\frac{-2}{x+3}+5$ **(B)** $g(x)=\frac{-2}{x-5}-3$ **(C)** $g(x)=\frac{-2}{x+5}+3$ **(D)** $g(x)=\frac{-2}{x-5}+3$

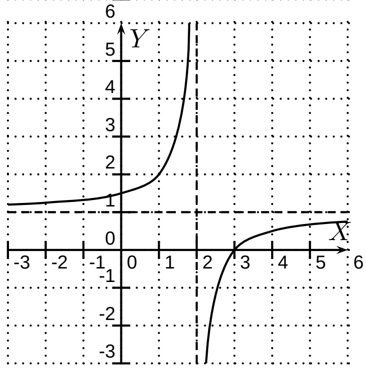
10.16. (R) Naszkicuj wykres funkcji, wyznacz jej dziedzinę, zbiór wartości, podaj równania asymptot, oblicz miejsca zerowe, określ argument, dla którego funkcja przyjmuje wartości dodatnie, ujemne, podaj przedziały monotoniczności:

a) $f(x)=1-\frac{4}{x+2}$

b) $f(x)=\frac{-3x-6}{x+3}$



10.17. (R) W oparciu o wykres funkcji wymiernej określonej wzorem $f(x)=\frac{ax+2}{bx+c}$, wyznacz wartości a,b,c.



10.18. (R) Asymptotą pionową wykresu funkcji f o wzorze $f(x)=\frac{ax+b}{x+d}$, jest prosta o równaniu $x=2$, a asymptotą poziomą prosta $y=1$. Wyznacz wzór funkcji f.

10.19. (R) Funkcja f jest określona wzorem $f(x)=\frac{1}{x+1}-1$ dla wszystkich liczb rzeczywistych $x\neq 1$. Rozwiąż nierówność $f(x)>f(2-x)$.

10.20. (R) Dana jest funkcja określona wzorem $f(x) = \frac{3x-1}{2x+3}$.

a) Wyznacz dziedzinę i miejsca zerowe funkcji f.

b) Rozwiąż nierówność: $f(x) + 1 \leqslant f(x-3)$.

10.21. (R) Dana jest funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$. Rozwiąż nierówność $f(x) - f(\frac{1}{x}) \leqslant f(x^3) - f(\frac{1}{x^3})$.

10.22. (R) Rozpatrujemy wszystkie prostokąty o polu równym 6, których dwa sąsiednie boki zawarte są w osiach OX i OY układu współrzędnych. Wyznacz równanie krzywej będącej zbiorem tych wierzchołków rozpatrywanych prostokątów, które nie leżą na żadnej z osi układu współrzędnych. Narysuj tę krzywą.

10.23. (R) Znajdź równanie prostej $y = ax + b$ $(a \neq 0)$, której jedynym punktem wspólnym z wykresem funkcji $y = \frac{1}{x}$ jest punkt $(1, 1)$. Oblicz pole trójkąta ograniczonego osiami układu współrzędnych i tą prostą.

10.24. (R) Sporządź wykres funkcji $f(x) = \left|\frac{x-4}{x-2}\right|$, a następnie korzystając z tego wykresu, wyznacz wszystkie wartości parametru k, dla których równanie $\left|\frac{x-4}{x-2}\right| = k$, ma dwa rozwiązania, których iloczyn jest liczbą ujemną.

10.25. (R) Funkcja homograficzna f jest określona wzorem $f(x) = \frac{px-3}{x-p}$, gdzie $p \in \mathbb{R}$ jest parametrem i $|p| \neq \sqrt{3}$.

a) Dla $p = 1$ zapisz wzór funkcji w postaci $f(x) = k + \frac{m}{x-1}$, gdzie k oraz m są liczbami rzeczywistymi.

b) Wyznacz wszystkie wartości parametru p, dla których w przedziale $(p, +\infty)$ funkcja f jest malejąca.

10.26. (R) Rozwiąż równanie:

a) $x + \frac{21}{x} = 10$

b) $x + \frac{3}{x-3} = \frac{2x+3}{3-x}$

c) $\frac{x+2}{x} + \frac{x}{x+2} = 2$

d) $1 + \frac{x}{x+2} = \frac{2x^2}{x^2-4}$

10.27. (R) Rozwiąż nierówność:

a) $\frac{3}{x-2} \leqslant \frac{2}{x+3}$

b) $x \geqslant \frac{x+1}{1-x}$

c) $\frac{2x-5}{3-4x} > 1$

10.28. (R) Przedział $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ jest zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności $\frac{2}{x} < m$ z niewiadomą x. Oblicz m.

10.29. (R) Wyznacz wszystkie wartości x spełniające warunek: $-3 < \frac{1}{x} < -\frac{1}{2}$.

10.30. (R) Wyznacz dziedzinę funkcji f określonej wzorem: $f(x) = \sqrt{\frac{x^3-2x^2-x+2}{x+4}}$.

10.31. (R) Uzasadnij, że funkcja $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ przyjmuje dla dodatnich argumentów wartości nie mniejsze od 3.

10.32. (R) Rozwiąż równanie:

a) $\frac{5-x}{x^2-1} - \frac{2x-1}{x^2+x+1} = \frac{5x+4}{x^3-1}$

b) $\left|\frac{3}{|x+2|} - 1\right| = 8$

c) $\left|\frac{6x-3}{2x+1}\right| = 3$

10.33. (R) Rozwiąż nierówność:

a) $\frac{(x-2)^3(x-1)}{(x-5)^2(x+1)} \leqslant 0$

b) $\frac{x^3-x+6}{x^2} \geqslant 0$

c) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} > \frac{1}{x^2+3x+2}$

d) $\frac{1}{|4-3x|} > 2$

e) $\left|\frac{2x-1}{x+2}\right| < 3$

f) $\left|\frac{1}{|x|}\right| < 1$

11 Funkcje potęgowe, wykładnicze i logarytmiczne

11.1. Wykonaj działania na potęgach:
a) $(4x^{-1}+3x)(4x-3x^{-1})$
b) $(108^{\frac{1}{3}}+64^{\frac{1}{3}}-4^{\frac{1}{3}})2^{\frac{1}{3}}$
c) $(\sqrt[3]{5}-1)^3$
d) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-1}$
e) $\frac{4\sqrt[3]{2}}{\sqrt{8}}\left(\frac{1}{2}\right)^5$
f) $\frac{3\cdot 2^{2000}+2^{2001}}{10^{1999}}\cdot 5^{2000}$
g) $\frac{3^7+3^6}{3^6+3^5}$

11.2. Przedstaw w postaci potęgi:
a) $\frac{\sqrt{x\sqrt{x}}}{x^5}(x\sqrt{x})^3$
b) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$
c) $\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5}}}$

11.3. Sprawdź, czy ciąg:
a) $(\sqrt{5}-\sqrt{3}-2, \sqrt{5}-2, \sqrt{5}+\sqrt{3}-2)$ jest ciągiem arytmetycznym,
b) $(\sqrt{5}-2, \frac{1}{\sqrt{5}-2}, 17\sqrt{5}+38)$ jest ciągiem geometrycznym,
c) $(16, 2^{x-1}, 4^{x-3})$ jest ciągiem geometrycznym.

11.4. Do wykresu funkcji wykładniczej należy punkt $A=(-1,\frac{1}{3})$. Podaj wzór tej funkcji.

11.5. Naszkicuj wykres funkcji:
a) $y=4^{-x}-4$
b) $y=\frac{2^x}{2}-3$
c) $f(x)=2^x-1$ określonej w przedziale $\langle -2,2\rangle$
d) $f(x)=2^{x-1}$ określonej w przedziale $\langle -2,2\rangle$.

11.6. Wykonaj wykres funkcji $f(x)=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$ i podaj miejsca zerowe oraz zbiór wartości funkcji.

11.7. Oblicz:
$4^{log_4 18}$
$3^{log_3 7}$
$\left(\frac{1}{2}\right)^{log_2 11}$
$log 1$
$log_7 7$
$log_4 64$
$log_{\frac{1}{2}} b = 5$
$log_{\sqrt{2}} b = -6$
$log_{27} b = \frac{2}{3}$

11.8. Oblicz:
a) $log125+log4-log5$
b) $log_3 36-log_3 2+log_3\frac{1}{6}$
c) $log_{\frac{1}{2}} 0,6-log_{\frac{1}{2}} 0,15$
d) $log_7 19-log_7\frac{19}{49}$

11.9. Dany jest $logx=\frac{1}{3}$. Oblicz:
a) $logx^6$
b) $log\frac{1}{x^3}$

c) $log\sqrt{x}$
d) $log\frac{1}{\sqrt{x^3}}$

11.10. Dany jest $log_3x = -\frac{1}{4}$. Oblicz:
a) $log_3 9x^8$
b) $log_3\frac{x^4}{81}$
c) $log_3\sqrt[4]{3x^6}$

11.11. Przedstaw podane wyrażenia w postaci jednego logarytmu:
a) $2log_3x + log_3y + 1$
b) $\frac{1}{2}log_2x - log_2y - 2$
c) $\frac{1}{3}log_5 8x^3 - 2log_5\sqrt{x}y + \frac{1}{2}$
d) $\frac{1}{2}log4x^4 + \frac{1}{3}logx^6 + \frac{1}{4}log16x^3 - 3$

11.12. Wiemy, że $log_2 5 = a$. Wyznacz $log_{25}8$.

11.13. Dana jest funkcja $f(x) = log_2x$. Oblicz $\frac{f(12)-2}{f(3)}$.

11.14. Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek: $log_4c = log_3b = log_2a = 2$. Oblicz $\sqrt{abc}$.

11.15. Wykaż, że prawdziwa jest równość:
a) $log_2 25 + log_4 25 = log_2 125$
b) $log_{0,1}4 + log_{0,01}16 = log\frac{1}{16}$
c) $log_3 4 + log_9 4 = log_{\frac{1}{3}}0,125$

11.16. **Test wyboru.** Zaznacz poprawne odpowiedzi.

a) Wartością wyrażenia $9^{3log_{27}5+log_3 2}$ jest:

(A) 7 **(B)** 10 **(C)** 30 **(D)** 100

b) Liczba $a = 4\cdot 25^{\frac{1}{2}log_5 7 - log_5 2}$ jest liczbą:

(A) niewymierną **(B)** naturalną **(C)** pierwszą **(D)** złożoną

c) Liczba $log_4(-log_3(log_2\sqrt[9]{8}))$ jest liczbą:

(A) całkowitą **(B)** wymierną **(C)** niewymierną **(D)** ujemną

d) Wartość iloczynu $log_3 2\cdot log_4 3\cdot log_5 4\cdot ...\cdot log_{10}9$ jest równa:

(A) $\frac{1}{log_2 10}$ **(B)** $log_{10}2$ **(C)** $log_{10}9!$ **(D)** $log_3 9$

11.17. (R) Sporządź wykres funkcji:
a) $f(x) = -|x+4|^{\frac{1}{2}} + 2$
b) $f(x) = -(x+3)^{-1} - 2$
c) $f(x) = (x-2)^3 - 4$

11.18. (R) Narysuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji f i g opisane wzorami: $f(x) = 2^{x-1}$ i $g(x) = |2x+1|$ oraz na podstawie ich wykresów odczytaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = g(x)$.

11.19. (R) Dwa ciała poruszają się ruchem jednostajnym; pierwsze z prędkością $v_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2t-1}\ \frac{cm}{s}$, a drugie z prędkością
$v_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^{4-t}\ \frac{cm}{s}$, gdzie t oznacza czas liczony w sekundach od początku obserwacji tych ciał. Kiedy stosunek v_1 do v_2 jest mniejszy od $\frac{32}{243}$?

11.20. (R) Rozwiąż równanie:
a) $4^x - 8\cdot 2^x = 0$
b) $5^{x-1} - 5\cdot 2^x = 5^{x-2} + 5\cdot 2^{x-2}$
c) $7^{x-2}\cdot 16^x = 2^{3x+2}$

d) $3^{x+2} - 3^x = 72$
e) $5^x + 5^{3-x} = 30$
f) $9 \cdot 4^{\frac{1}{x}} + 5 \cdot 6^{\frac{1}{x}} = 4 \cdot 9^{\frac{1}{x}}$

11.21. (R) Rozwiąż nierówność:
a) $25 \cdot (0,2)^{x^2} < 5^x$
b) $1 < 2^{x^2} \leqslant 2^x$
c) $16^x - 4^x \leqslant 0$
d) $4^x + 2^{x+1} \leqslant 15$
e) $6^x \leqslant 11^x$
f) $2^{x+2} - 2^x < 48$

11.22. (R) **a)** Dla jakich wartości x określone jest wyrażenie: $\sqrt{6^x + 6^{2-x} - 37}$?
b) Dla jakich wartości x funkcja $f(x) = \frac{\sqrt{8-2^x}}{logx}$ jest określona?
c) Określ dziedzinę funkcji: $f(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^x - 4} + \frac{1}{\sqrt{27-3^x}}$.

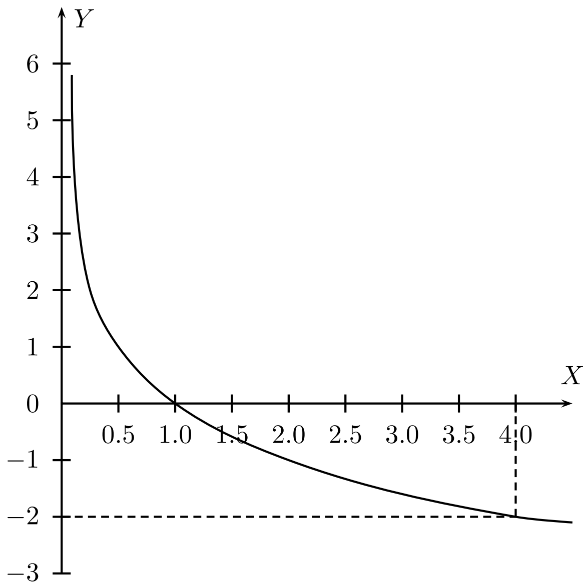
11.23. (R) Rozwiąż nierówność: $h(g(x)) \geqslant \frac{1}{16}$, jeżeli $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ i $g(x) = x^2 - 5$.

11.24. (R) Nie korzystając z kalkulatora, oblicz:
a) $log_{\frac{1}{9}} \frac{\sqrt[3]{3}}{3}$
b) $9^{6log_{81}2 + log_3 2}$
c) $log_{0,25}27 \cdot log_{\sqrt{3}}\frac{1}{8}$

11.25. (R) Wyznacz $log_{16}6$ jeżeli wiesz, że $log_2 12 = a$

11.26. (R) Oblicz:
a) $3^{log_{3\sqrt{3}}27}$
b) $(\sqrt[3]{4})^{log_{4\sqrt{2}}32}$
c) $5^{log_3 7} - 7^{log_3 5}$

11.27. (R) Na rysunku przedstawiono wykres funkcji logarytmicznej f. Rozwiąż równanie
$(f(x))^2 - 16 = 0$.



11.28. (R) Rozwiąż równanie $log_5(log_4(log_2 x)) = 0$.

11.29. (R) Rozwiąż równanie $log_{\frac{1}{4}}x \cdot log_2 x = -\frac{1}{2}$.

11.30. (R) Rozwiąż równanie:
a) $log(x + 1,5) = -logx$
b) $log_2 x + 1 = 2log_x 2$
c) $log_x(3x + 4) = 2$
d) $\frac{2}{log_3 x - 1} + 1 = 6log_x 3$
e) $x^{1+log_2 x} = 4$

11.31. (R) Rozwiąż nierówność:
a) $log_3|x + 3| < 0$
b) $log_2(log_{\frac{1}{5}}(x - 1)) > 1$
c) $log_x(x + 2) \leqslant 2$

d) $log^3 2x - log^2 2x \geqslant 0$
e) $log_{0,5}(x+4) - log_{0,5}(3x-1) \leqslant 0$

11.32. (R) Niech $A = \{x \in \mathbb{R} : log_2(3x-1) < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x^3 \geqslant 4x\}$. Wyznacz zbiory: A, B, $A \cap B$.

11.33. (RR) Rozwiąż równanie:

$$\lim_{n\to\infty} \left(log_2 4x + log_2^2 4x + log_2^3 4x + ... + log_2^n 4x\right) = 1 + \frac{1}{2} log_2 x.$$

11.34. (RR) Dany jest nieskończony ciąg geometryczny, którym $a_1 = log_3 x$ i iloraz $q = log_3 x$. Oznaczmy przez $f(x)$ sumę tego ciągu.
a) Wyznacz dziedzinę funkcji f.
b) Rozwiąż nierówność $f(x) > 1$.

11.35. (RR) Rozwiąż równanie: $1 + log_8 x + log_8^2 x + log_8^3 x + ... = 3$.

11.36. (RR) Rozwiąż układ równań:
a) $\begin{cases} 3^x \cdot 5^{y+1} = 9 \\ 3^{x-2} + 5^{y+2} = 6. \end{cases}$
b) $\begin{cases} 3x + y = 8^{log_8 12} \\ x^2 + y^2 - 2xy = log_2 144 - \frac{1}{2} log_2 81 \end{cases}$

11.37. (RR) Dany jest ciąg (x_n), o wyrazach dodatnich, w którym

$$\begin{cases} log_2 x_1 = -2 \\ log_2 x_n - log_2 x_{n-1} = -2, \text{ dla } n \in \mathbb{N}_+ \setminus \{1\} \end{cases}$$

Wykaż, że

$$\lim_{n\to\infty} (x_1 + x_2 + ... + x_n) = \frac{1}{3}.$$

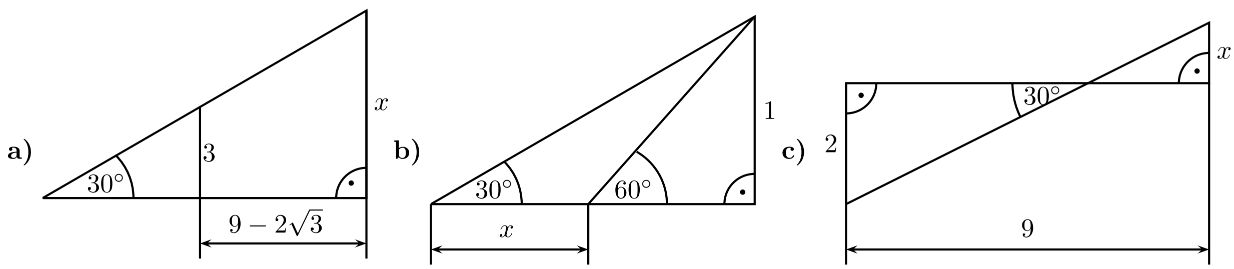
11.38. (RR) Rozwiąż nierówność $\frac{2+m^{2x}}{1-m^x} > -6$ przy założeniu, że wartość parametru m należy do przedziału $(0,1)$.

12 Funkcje trygonometryczne

12.1. Wyznacz długości boków trójkąta prostokątnego ABC oraz wartości funkcji trygonometrycznych kąta $\sphericalangle CAB$ mając dane $sin|\sphericalangle(CAB)| = \frac{4}{5}$ i $|BC| = 2$.

12.2. Rozwiąż trójkąt prostokatny mając dane przyprostokątne $a = \sqrt{2} - 1$, $b = \sqrt{6} - \sqrt{3}$.

12.3. Oblicz x, gdy:



12.4. Oblicz długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego, jeśli α jest jednym z dwóch kątów ostrych trójkąta oraz $tg\alpha = \frac{4}{3}$ i długość przeciwprostokątnej równa jest 15 cm.

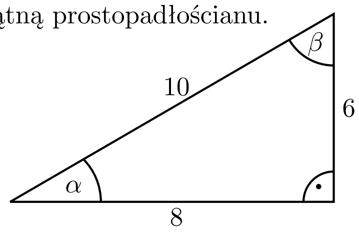
12.5. Wyznacz kąty trójkąta prostokątnego wiedząc, że:
a) iloczyn sinusa jednego kąta ostrego i cosinusa drugiego kąta ostrego wynosi $\frac{1}{4}$.
b) kwadrat odwrotności tangensa kąta ostrego wynosi 3.

12.6. W pewnym trójkącie prostokątnym suma cosinusów kątów ostrych jest równa $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Oblicz iloczyn sinusów tych kątów.

12.7. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego, w którym dana przyprostokątna jest dwa razy dłuższa od drugiej przyprostokątnej.

12.8. Dany jest prostopadłościan o krawędziach podstawy 1 dm, 2 dm i wysokości 30 cm. Podaj wartości funkcji trygonometrycznych kąta zawartego między przekątną podstawy a przekątną prostopadłościanu.

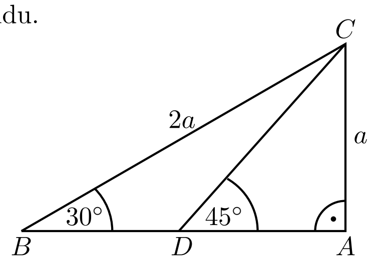
12.9. Korzystając z danych przedstawionych na rysunku, oblicz wartość wyrażenia: $tg^2\beta - 5sin\beta ctg\alpha + \sqrt{1-cos^2\alpha}$.



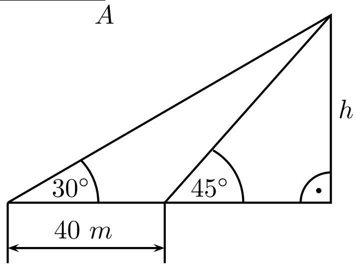
12.10. Turysta idzie prostą drogą wznoszącą się pod kątem 5°.
a) Jaką różnicę poziomów pokona po przejściu $0,5$ km?
b) Jak długo musiałby iść tą drogą z szybkością $4,5$ km/h, aby pokonać różnicę poziomów równą 130 m.

12.11. Przekątne deltoidu mają długości 20 cm i 30 cm. Punkt przecięcia przekątnych dzieli dłuższą z nich w stosunku 2 : 1. Oblicz miary kątów deltoidu.

12.12. Dany jest trójkąt ABC.
a) Oblicz wartość stosunku $\frac{|AB|}{|CA|}$.
b) Wyznacz wartości $\frac{|BC|}{|CD|}$.



12.13. Korzystając z danych na rysunku oblicz wysokość komina.



12.14. Wierzchołek latarni morskiej znajduje się 30 metrów nad poziomem morza. W kierunku latarni płynie ponton, z którego widać wierzchołek latarni pod kątem 10°. Po pewnym czasie ponton zbliżył się do latarni tak, że jej wierzchołek widać pod kątem 35°. Jaką odległość przebył ponton w tym czasie?

12.15. Pewnego dnia poziom wody y (w metrach) na ławicy piaskowej u wejścia do portu wyrażał się wzorem: $y = 14 + 10sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)$, gdzie t oznacza liczbę godzin jaka upłynęła od godziny $12^{\underline{00}}$.
Oblicz poziom wody o godzinie $14^{\underline{00}}$, $15^{\underline{00}}$, $16^{\underline{00}}$. O której godzinie tego dnia woda osiągnie najwyższy poziom?

12.16. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kata ostrego α, jeśli:
a) $sin(90° - \alpha) = \frac{3}{10}$
b) $ctg(90° - \alpha) = \frac{2}{5}$
c) $sin\alpha = \frac{1}{3}$
d) $ctg\alpha = 2,4$

12.17. Korzystając z tożsamości $ctg^2\alpha + 1 = \frac{1}{sin^2\alpha}$ wyznacz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego, gdy $ctg\alpha = \frac{1}{7}$.

12.18. Czy istnieje kąt α, dla którego
a) $sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \ \wedge \ sin(90° - \alpha) = \frac{1}{2}$
b) $tg\alpha = \sqrt{2} \ \wedge \ tg(90° - \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
c) $tg\alpha = \sqrt{5} - 2 \ \wedge \ ctg\alpha = \sqrt{5} + 2$
d) $tg\alpha = \frac{3}{4} \ \wedge \ sin\alpha = \frac{3}{5}$
e) $3cos\alpha - 2 = 6$
f) $sin\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \ \wedge \ cos\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$

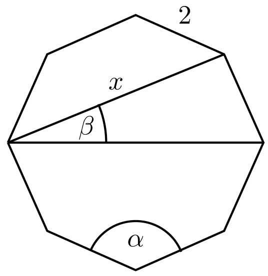
12.19. Wiedząc, że α jest kątem ostrym i $tg\alpha = 2$, oblicz wartość wyrażenia $\frac{4cos\alpha - sin\alpha}{3cos\alpha + 5sin\alpha}$.

12.20. Oblicz $a - b$, gdy $a = sin^4\alpha - cos^4\alpha$, $b = 1 - 4sin^2\alpha \cdot cos^2\alpha$ dla $\alpha = 60°$.

12.21. **Test wyboru.** Zaznacz poprawne odpowiedzi.

a) Sinus kąta ostrego α jest równy $\frac{3}{5}$. Wynika stąd, że:
(A) $cos\alpha = \frac{2}{5}$.
(B) $tg\alpha = 0,75$.
(C) $ctg(90° - \alpha) = \frac{4}{3}$.

b) W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna ma długość 50 cm, a sinus jednego z kątów ostrych jest równy $\frac{24}{25}$. Zatem w tym trójkącie:
(A) obwód jest równy 112 cm.
(B) tangens jednego z kątów ostrych jest większy od 3.
(C) jedna z wysokości ma długość $13,44$ cm.



c) W ośmiokącie foremnym o boku 2 (rysunek obok):
(A) $\alpha = 120°$.
(B) $x = 2 + \sqrt{2}$.
(C) $tg\beta = \sqrt{2} - 1$.

d) Następujące równanie jest prawdziwe dla $\alpha = 60°$.
(A) $cos\alpha + cos(90° - \alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}-1}$
(B) $\sqrt{3}sin\alpha - \frac{1}{2} = tg45°$
(C) $tg^2\alpha + ctg^2\alpha = 3 + cos\alpha$

e) Wartość następującego wyrażenia jest rowna 1.
(A) $sin40° - cos50°$
(B) $\frac{sin29°}{cos61°}$
(C) $(sin20° + cos20°)(sin20° - cos20°) + 2sin^270°$

12.22. (R) Miary dwóch kątów trójkąta wynoszą $\frac{\pi}{6}$ i $\frac{\pi}{5}$. Oblicz miarę trzeciego kąta. Odpowiedź podaj w stopniach.

12.23. (R) Naszkicuj w układzie współrzędnych kąt α taki, że
a) $sin\alpha = -\frac{1}{3} \ \wedge \ \alpha \in \langle 270°, 360° \rangle$
b) $cos\alpha = \frac{4}{5}$
c) $tg\alpha = 2 \ \wedge \ \alpha \in \langle 180°, 270° \rangle$
d) $ctg\alpha = -\frac{5}{3}$

12.24. (R) Wiedząc, że $0° \leqslant \alpha \leqslant 360°$, $sin\alpha < 0$ oraz $4tg\alpha = 3sin^2\alpha + 3cos^2\alpha$
a) oblicz $tg\alpha$,
b) zaznacz w układzie współrzędnych kąt α i podaj współrzędne dowolnego punktu, różnego od początku układu współrzędnych, który leży na końcowym ramieniu tego kąta.

12.25. (R) Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta:
a) $\beta = 120°$
b) $\beta = 210°$
c) $\beta = 315°$

12.26. (R) Oblicz:
a) $sin765°$
b) $cos1200°$
c) $sin(-1710°)$
d) $tg(-750°)$

e) $cos(-450°)$
f) $ctg(-1395°)$
g) $sin(-7\pi)$
h) $cos\frac{15}{2}\pi$
i) $ctg(-\frac{23}{4}\pi)$
j) $tg\frac{13}{3}\pi$
k) $2sin150° - 3cos120° + tg135°$

12.27. (R) Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta x, gdy:
a) $sinx = -\frac{\sqrt{5}}{5} \ \wedge \ x \in \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$
b) $tgx = -3 \ \wedge \ x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$
c) $cosx = \frac{2}{3}$

12.28. (R) Miary pięciu kątów tworzą ciąg arytmetyczny. Drugim wyrazem tego ciągu jest $150°$ a czwartym $270°$. Oblicz sumę sinusów tych pięciu kątów.

12.29. (R) Oblicz wartość wyrażenia $\frac{sinx+cosx}{2sinx-3cosx}$, dla $tgx = 2$.

12.30. (R) Wykaż, że wyrażenie $\frac{-cos2x}{sinx \cdot cosx} = tgx + \frac{1}{tgx}$ nie jest tożsamością.

12.31. (R) Sprawdź, czy podana równość jest tożsamością trygonometryczną:
a) $1 - (cos\alpha - sin\alpha)^2 = 2sin\alpha cos\alpha$
b) $\frac{cos^2\alpha}{1-sin^2\alpha} = \left(\frac{sin^2\alpha}{1-cos^2\alpha}\right)^{-1}$
c) $cos\alpha\sqrt{1+tg^2\alpha} = -1$ dla $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$
d) $\frac{cos\alpha}{1-sin\alpha} = \frac{1+sin\alpha}{cos\alpha}$, dla $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{C}$.

12.32. (R) Rozwiąż równanie:
a) $cos3x = sin\frac{5}{6}\pi$
b) $tgx = sinx$, gdy $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
c) $\sqrt{3}tg\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 1$
d) $ctgx = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, gdzie $x \in (-\pi, 0)$
e) $cosx = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

12.33. (R) **a)** Oblicz wartość wyrażenia $sin2x$, jeśli $ctgx = 5 \ \wedge \ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
b) Sprawdź, czy $ctg10° - ctg20° = \frac{1}{sin20°}$.
c) Na podstawie wzoru: $sin(\alpha+\beta) = sin\alpha cos\beta + sin\beta cos\alpha$, oblicz: $sin75°$.
d) Oblicz $sin\alpha + cos\alpha$, gdy $sin\alpha \cdot cos\alpha = 0,5$.

12.34. (R) Dla jakich wartości parametru:
a) m równanie $3cosx - 2 = m$ ma rozwiązanie;
b) a istnieje rozwiązanie równania $sinx = 2a - 3$;
c) Dane jest równanie $sinx = a^2+1$, z niewiadomą x. Wyznacz wszystkie wartości parametru a, dla których dane równanie nie ma rozwiązań.
d) Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $(sin^2x - cos^2x)^2 + m^2 - 5 = 0$ z niewiadomą x ma rozwiązanie.

12.35. (R) Dana jest funkcja f o wzorze $f(x) = cos2x + 4cosx + 3$.
a) Oblicz $f(\pi)$.
b) Wyznacz zbiór miejsc zerowych funkcji f.

12.36. (R) Wyznacz największą ujemną liczbę spełniającą równanie $cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.

12.37. (R) Zbiór A jest zbiorem rozwiązań równania $cos3x = cosx$ w zbiorze liczb rzeczywistych, zaś B zbiorem rozwiązań równania $sin4x = 0$ w przedziale $x \in \langle 0, 2\pi\rangle$. Wyznacz iloczyn zbiorów A i B.

12.38. (R) **a)** Rozwiąż równanie: $1 + cos2x = cosx$.
b) Podaj współrzędne punktów przecięcia się wykresów funkcji $y = sinx$ i $y = cos2x$ w przedziale $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$.

c) Rozwiąż równanie $2cos^2x = sinx - 1$.

d) Rozwiąż równanie $\frac{1}{sinx} = \frac{1}{sin4x}$ w przedziale $\langle -\pi, \pi\rangle$.

12.39. (R) Wyznacz wszystkie rozwiązania równania $2cos2x = cosx$ należące do przedziału $\langle 0, 2\rangle$.

12.40. (R) Dane jest równanie postaci $(cosx - 1) \cdot (cosx + p + 1) = 0$, gdzie $p \in \mathbb{R}$ jest parametrem.
a) Dla $p = -1$ wypisz wszystkie rozwiązania tego równania należące do przedziału $\langle 0; 5\rangle$.
b) Wyznacz wszystkie wartości parametru p, dla których dane równanie ma w przedziale $\langle -\pi; \pi\rangle$ trzy różne rozwiązania.

12.41. (R) Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \frac{sin^2x - |sinx|}{sinx}$ dla $x \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$.
a) Naszkicuj wykres funkcji f.
b) Wyznacz miejsca zerowe funkcji f.

12.42. (R) **a)** Naszkicuj wykres funkcji $y = sin2x$ w przedziale $\langle -2\pi, 2\pi\rangle$.

b) Naszkicuj wykres funkcji $y = \frac{|sin2x|}{sin2x}$ w przedziale $\langle -2\pi, 2\pi\rangle$ i zapisz, dla których liczb z tego przedziału spełniona jest nierówność $\frac{|sin2x|}{sin2x} < 0$.

12.43. (R) Naszkicuj wykres funkcji f i odczytaj z niego jego miejsca zerowe i zbiór wrtości:
a) $f(x) = sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
b) $f(x) = cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$
c) $f(x) = ctg\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$
d) Naszkicuj dla $x \in \langle -\pi, \pi\rangle$ wykres funkcji $y = |cosx|$.
e) Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = -2sinxcosx$ dla $x \in (-\pi, \pi)$, podaj jej miejsca zerowe i przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości dodatnie.
f) Wyznacz okres zasadniczy funkcji i sporządź jej wykres $g(x) = sinx + cosx$.

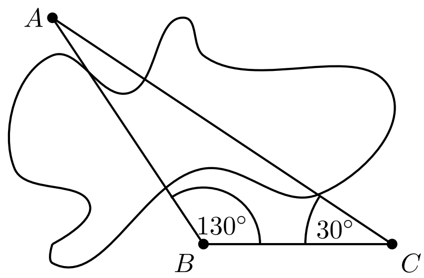
12.44. (R) **a)** Wyznacz wszystkie liczby z przedziału $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, które spełniają nierówność $tgx > -1$.

b) Rozwiąż nierówność $cosx \leqslant 0,5$ w przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$.

c) Odczytaj z wykresu funkcji, dla jakich wartości argumentu $x \in \langle 0, 2\pi\rangle$ spełniona jest nierówność $sinx > -\frac{1}{2}$.

d) Rozwiąż nierówność $ctgx \geqslant 1$.

12.45. (R) Obiekty A i B leżą po dwóch stronach jeziora. W terenie dokonano pomiarów odpowiednich kątów i ich wyniki przedstawiono na rysunku. Odległość między obiektami B i C jest równa 400 m. Oblicz odległość w linii prostej między obiektami A i B i podaj wynik, zaokrąglając go do jednego metra.



12.46. (R) Dany jest trójkąt o bokach długości 1, $\frac{3}{2}$, 2. Oblicz cosinus i sinus kąta leżącego naprzeciw najkrótszego boku tego trójkąta.

12.47. (RR) Wyznacz pochodną funkcji $y = \frac{x}{1-cosx}$.

12.48. (RR) Zbadaj monotoniczność funkcji określonej wzorem $f(x) = 5x + cos4x$.

12.49. (RR) **a)** Zbadaj, czy istnieje styczna do krzywej o równaniu $y = \frac{1}{4}sin2x$ równoległa do prostej o równaniu $y = -x$.

b)Wyznacz współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji $f(x) = cos^2 2x$ w punkcie $M = (x_0, f(x_0))$ jeśli $x_0 = \frac{3}{8}\pi$.

13 Ciągi

13.1. **a)** Podaj pięć wyrazów ciągu:

$$a_n = \sqrt{n^2 + n}, \qquad b_n = \frac{n-2}{(n+1)!}, \qquad c_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & \textit{dla } n \textit{ nieparzystego} \\ 2, & \textit{dla } n \textit{ parzystego} \end{cases}$$

b) Które z wyrazów ciągu są równe zero:

$$a_n = \frac{1 + (-1)^n}{2n - 1}, \qquad b_n = (n^2 - 1)(n^2 - 5n + 6)$$

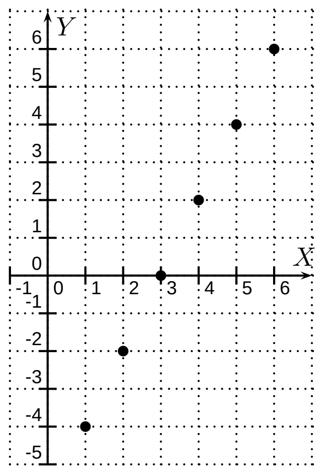
c) Dany jest ciąg $a_n = n^2 - 6n$. Które wyrazy ciągu są mniejsze od 10?
d) Zbadaj monotoniczność ciągu:

$$a_n = 2n^2 - 3n + 1, \qquad d_n = \frac{2 + 4 + 6 + ... + 2n}{n^2}$$

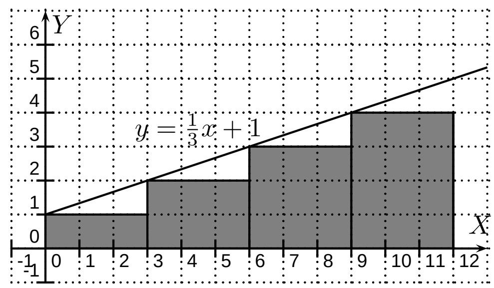
13.2. Dany jest ciąg (a_n), gdzie $a_n = \frac{n+2}{3n+1}$ dla $n = 1, 2, 3...$ Wyznacz wszystkie wyrazy tego ciągu większe od $\frac{1}{2}$.

13.3. Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = (-1)^n \cdot \frac{2-n}{n^2}$ dla $n = 1, 2, 3...$. Oblicz a_2, a_4 i a_5.

13.4. Sprawdź, czy dany ciąg jest:
a) arytmetyczny: $a_n = \frac{n}{n+1}$,
b) geometryczny, gdy $b_n = (a_n)^2$ i $a_n = 3 \cdot 2^n$ oraz czy ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym.



13.5. Na rysunku przedstawiono część wykresu pewnego nieskończonego ciągu arytmetycznego (a_n).
a) Na podstawie wykresu tego ciągu odczytaj jego pierwszy wyraz i różnicę.
b) Podaj wzór na ogólny wyraz tego ciągu.
c) Niech $b_n = -\frac{1}{2}n^2$ będzie wyrazem ogólnym ciągu (b_n). Dla jakich wartości n, $a_n = b_n$?



13.6. Oblicz pole figury złożonej ze stu prostokątów, które powstały w sposób pokazany na rysunku.

13.7. W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są wyrazy: $a_3 = 4$, $a_6 = 19$. Wyznacz wszystkie wartości n, dla których wyrazy ciągu (a_n) są mniejsze od 200.

13.8. W nieskończonym ciągu arytmetycznym czwarty wyraz jest równy 17, a suma wyrazów trzeciego i szóstego 39. Wyznacz różnicę i pierwszy wyraz tego ciągu.

13.9. Wyznacz liczbę składników w sumie $2 + 5 + 8 + 11 + ... + 449$ i oblicz tę sumę.

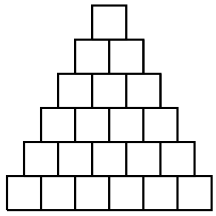
13.10. Rozwiąż równanie $(2x + 1) + (2x + 4) + (2x + 7) + ... + (2x + 28) = 155$, jeśli wiadomo, że składniki po lewej stronie są kolejnymi wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego.

13.11. Tomek w dziesiątym dniu sezonu grzybowego zebrał 13 kg grzybów.
a) Oblicz ile grzybów zebrał Tomek pierwszego dnia, jeżeli wiadomo, że każdego poprzedniego dnia zbierał o $\frac{1}{2}$ kg mniej.
b) Ile kilogramów grzybów zebrał w ciągu tych 10 dni?

13.12. Darek odkładał ze stypendium pieniądze na wakacje. W pierwszym miesiącu odłożył 30 zł, a w każdym następnym o 5 złotych więcej niż w poprzednim. Przez ile miesięcy oszczędzał, jeżeli w sumie uzbierał 450 złotych?

13.13. Pewna figura o polu równym 270 cm^2 składa się ze skończonej liczby prostokątów, których pola tworzą ciąg arytmetyczny. Pole najmniejszego prostokąta wynosi 12 cm^2, a największego 48 cm^2.
a) Z ilu prostokątów składa się figura?
b) Oblicz pole trzeciego prostokąta tej figury.

13.14. Krzyś postanowił wybudować wieżę z klocków, według następującego szkicu projektu. Ma do dyspozycji 210 sześciennych klocków o wysokości 4 cm. Jak wysoką wieżę może zbudować?



13.15. Średni zarobek pięciu pracowników pewnej firmy wyniósł w maju 1560 złotych, a najwyższa pensja wyniosła 1800 złotych.
a) Oblicz wysokości pensij tych pracowników w maju jeśli wiadomo, że tworzyły one ciąg arytmetyczny.
b) W czerwcu nie pracował już pracownik, który w maju zarabiał najmniej i wtedy pensje pozostałych czterech wzrosły o jednakową kwotę. Ile zarabiał każdy z pozostałych pracowników w czerwcu, jeśli wiadomo, że kwota przeznaczona na wypłatę pensji była w czerwcu taka sama jak w maju?

13.16. Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n), gdzie $n \geqslant 1$. Wiadomo, że dla każdego $n \geqslant 1$ suma n początkowych wyrazów $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ wyraża się wzorem: $S_n = -n^2 + 13n$.
a) Wyznacz wzór na n-ty wyraz ciągu (a_n).
b) Oblicz a_{2007}.
c) Wyznacz liczbę n, dla której $a_n = 0$.

13.17. Na trzech półkach ustawiono 76 płyt kompaktowych. Okazało się, że liczby płyt na półkach górnej, środkowej i dolnej tworzą rosnący ciąg geometryczny. Na środkowej półce stoją 24 płyty. Oblicz, ile płyt stoi na półce górnej, a ile płyt stoi na półce dolnej.

13.18. Przedstaw w tabeli liczby mieszkańców miasta w ciągu 3 lat, zakładając, że miasto w 2004 roku ma 200 tysięcy mieszkańców i liczba ta co roku będzie malała o 5%.

Rok	2004	2005	2006	2007
Liczba mieszkańców	200000			

13.19. Dany jest rosnący ciąg geometryczny, w którym $a_1 = 12$, $a_3 = 27$.
a) Wyznacz iloraz tego ciągu.
b) Zapisz wzór, na podstawie którego można obliczyć wyraz a_n, dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$.
c) Oblicz wyraz a_6.

13.20. Jasio w pierwszym miesiącu nauki opanował 500 słów. W każdym kolejnym miesiącu opanowywał o 20% słów mniej niż w miesiącu poprzednim.
a) Ile słów opanuje w trzecim miesiącu nauki?
b) Ile słów Jasio opanuje po czterech miesiącach nauki?

13.21. Piłka upuszczona z wysokości $6,25$ m, odbijając się od ziemi, osiągała za każdym razem wysokość wynoszącą $\frac{3}{5}$ poprzedniej.
a) Jak wysoko wzniosła się piłka po trzecim odbiciu się od ziemi?
b) Ile metrów przebyła piłka od momentu upuszczenia do chwili zetknięcia się z ziemią po raz czwarty?

13.22. Liczby $m, 4, n$, w podanej kolejności, są trzema początkowymi wyrazami ciągu geometrycznego, gdzie

$$m = \frac{\left(2^2\right)^3 \cdot 2^{-5}}{2^8 : 2^{10}}, \qquad n = \left(2^{\frac{1}{2}} - 1\right)^2 + 2^{\frac{3}{2}} - 1.$$

a) Oblicz sześć początkowych wyrazów tego ciągu.
b) Wyznacz taką liczbę p, aby m, n, p, w podanej kolejności tworzyły ciąg arytmetyczny.

13.23. Pan X umówił się z panem Y, że będzie mu wypłacał codziennie przez trzy tygodnie pieniądze, przy czym pierwszego dnia 10 zł, drugiego 20 zł, trzeciego 30 zł, czwartego 40 zł itd. W zamian pan Y wypłaci mu pierwszego dnia 1 grosz, drugiego 2 grosze, trzeciego 4 grosze, czwartego 8 groszy itd. Który z tych panów zyska na umowie i ile?

13.24. Rodzeństwo w wieku 8 i 10 lat otrzymało razem w spadku 84100 zł. Kwotę tę złożono w banku, który stosuje kapitalizację roczną przy rocznej stopie procentowej 5%. Każde z dzieci otrzyma swoją część spadku z chwilą osiągnięcia wieku 21 lat. Życzeniem spadkodawcy było takie podzielenie kwoty spadku, aby w przyszłości obie wypłacone części spadku zaokrąglone do 1 zł były równe. Jak należy podzielić kwotę 84100 zł między rodzeństwo? Zapisz wszystkie wykonywane obliczenia.

13.25. Pan Kowalski planując wyjazd na wakacje letnie w następnym roku postanowił założyć lokatę, wpłacając do banku 2000 zł na okres jednego roku. Ma do wyboru trzy rodzaje lokat:
lokata A - oprocentowanie w stosunku rocznym 5%, kapitalizacja odsetek po roku,
lokata B - oprocentowanie w stosunku rocznym $4,8\%$, kapitalizacja odsetek co pół roku,
lokata C - oprocentowanie w stosunku rocznym $4,6\%$, kapitalizacja odsetek co kwartał.
Oceń, wykonując odpowiednie obliczenia, która lokata jest najkorzystniejsza dla Pana Kowalskiego.

13.26. **a)** Cena płaszcza była 4 razy podwyższana o 5%. Jaka jest obecna cena płaszcza, jeżeli przed pierwszą podwyżką kosztował on 400 zł?
b) Kapitał w wysokości 1000 zł złożono w banku na procent składany. Jaka będzie wielkość kapitału po 6 latach przy oprocentowaniu rocznym wynoszącym 5%.
c) Do jakiej kwoty wzrośnie kapitał 500 zł złożony na 5 lat, jeżeli roczna stopa wynosi 4%, a odsetki są kapitalizowane co pół roku.
d) Na lokatę roczną, której oprocentowanie wynosi $4,5\%$ w skali roku, wpłacono 5000 zł. Oblicz stan tej lokaty po dwóch latach oszczędzania, jeżeli od nalicznych odsetek będzie pobierany co roku podatek w wysokości 20%.
e) Inwestor planuje uzyskać w banku kredyt, który zamierza spłacić po czterech latach. Taki kredyt w banku A jest oprocentowany 12% w skali roku, a odsetki są dopisywane do długu co pół roku. Bank B oferuje oprocentowanie roczne 11% z roczną kapitalizacją odsetek, a przy zwrocie kredytu pobiera prowizję w wysokości 4% kwoty udzielonego kredytu. Oceń, która oferta jest korzystniejsza dla kredytobiorcy.

13.27. **Test wyboru.** Zaznacz poprawne odpowiedzi.

a) Z liczb naturalnych, które przy dzieleniu przez 6 dają resztę 2, tworzymy ciąg, który jest ciągiem:
(A) geometrycznym
(B) rosnącym
(C) arytmetycznym
(D) ani arytmetycznym, ani geometrycznym

b) Jakie wartości powinny przyjąć x i y, aby ciąg $2, x, y, 12$ był ciągiem arytmetycznym?
(A) $x = \frac{17}{3}$ i $y = \frac{26}{3}$ **(B)** $x = \frac{16}{3}$ i $y = \frac{26}{3}$ **(C)** brak takich liczb **(D)** $x = 4$ i $y = 8$

c) Czy siódmy wyraz ciągu $a_n = n^2 - n + 1$ jest:
(A) mniejszy od zera
(B) większy od zera i mniejszy od 25
(C) większy od 25 i mniejszy od 50
(D) większy od 50

d) W nierosnącym ciągu geometrycznym $S_2 = 4$ i $S_4 = 20$. Wyraz pierwszy i iloraz ciągu wynoszą:

(A) $a_1 = \frac{4}{3}$ i $q = 2$ **(B)** $a_1 = -4$ i $q = -2$ **(C)** $a_1 = \frac{4}{3}$ i $q = -2$ **(D)** $a_1 = 1$ i $q = 2$

13.28. (R) Dany jest ciąg (a_n), gdzie $a_n = \frac{5n+6}{10(n+1)}$ dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$.
a) Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n).
b) Oblicz
$$\lim_{n\to\infty} a_n$$
c) Podaj największą liczbę a i najmniejszą liczbę b takie, że dla każdego n spełniony jest warunek $a \leqslant a_n \leqslant b$.

13.29. (R) Nieskończony ciąg liczbowy (a_n) jest określony wzorem $a_n = 4n - 31$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Wyrazy a_k, a_{k+1}, a_{k+2} danego ciągu (a_n), wzięte w takim porządku, powiększono: wyraz a_k o 1, wyraz a_{k+1} o 3 oraz wyraz a_{k+2} o 23. W ten sposób otrzymano trzy pierwsze wyrazy pewnego ciągu geometrycznego. Wyznacz k oraz czwarty wyraz tego ciągu geometrycznego.

13.30. (R) **a)** Dany jest ciąg liczbowy $a_n = 3n^2 - 3n + 2$ określony dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}_+$.
Wykaż, korzystając z definicji monotoniczności ciągu, że ciąg (a_n) jest rosnący.
b) Ciąg (a_n) określony jest rekurencyjnie w następujący sposób $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n+1} \end{cases}$, dla $n \geqslant 1$.
Wyznacz wzór ogólny ciągu.

13.31. (R) Dany jest ciąg (a_n) mający tę własność, że dla każdej liczby naturalnej n suma n początkowych wyrazów tego ciągu jest równa $\frac{1}{2}(7n^2 - n)$. Oblicz dwudziesty wyraz tego ciągu. Wykaż, że (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

13.32. (R) Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych, które nie dzielą się przez 3.

13.33. (R) Z ciągu liczb naturalnych $(1, 2, 3, 4, 5, \ldots)$ wybrano 100 kolejnych takich liczb, z których każda ma tę samą własność, że jeżeli podzielimy ją przez 3, to otrzymamy resztę jeden. Wyznacz najmniejszą z nich, wiedząc, że suma wszystkich tych liczb jest równa 17950.

13.34. (R) Liczbę naturalną t_n nazywamy n-tą liczbą trójkątną, jeżeli jest ona sumą n kolejnych, początkowych liczb naturalnych. Liczbami trójkątnymi są zatem: $t_1 = 1$, $t_2 = 1 + 2 = 3$, $t_3 = 1 + 2 + 3 = 6$, $t_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$, $t_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. Stosując tę definicję:
a) wyznacz liczbę t_{17}.
b) ułóż odpowiednie równanie i zbadaj, czy liczba 7626 jest liczbą trójkątną.
c) wyznacz największą czterocyfrową liczbę trójkątną.

13.35. (R) Ciąg liczbowy (a_n) jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ wzorem: $a_n = (n-3)(2-p^2)$, gdzie $p \in \mathbb{R}$.
a) Wykaż, że dla każdej wartości p ciąg (a_n) jest arytmetyczny.
b) Dla $p = 2$ oblicz sumę $a_{20} + a_{21} + a_{22} + \ldots + a_{40}$.
c) Wyznacz wszystkie wartości p, dla których ciąg (b_n) określony wzorem $b_n = a_n - pn$ jest stały.

13.36. (R) Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) wyraża się wzorem $S_n = 2n^2 + n$ dla $n \geqslant 1$.
a) Oblicz sumę 50 początkowych wyrazów tego ciągu o numerach parzystych: $a_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_{100}$.
b) (RR) Oblicz
$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{3n^2 - 2}$$

13.37. (R) Liczba $\left(-\frac{1}{5}\right)$ jest miejscem zerowym funkcji kwadratowej $f(x) = 15x^2 + bx + c$. Ciąg $(15, b, c)$ jest arytmetyczny. Oblicz współczynniki b i c.

13.38. (R) Wykaż, że jeżeli liczby $b, c, 2b - a$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego to liczby ab, b^2, c^2 są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

13.39. (R) Wiedząc, że dla pewnego ciągu geometrycznego (a_n) o wyrazach dodatnich prawdziwa jest równość $S_{14} = 5 \cdot S_7$, oblicz iloraz tego ciągu. Symbol S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów ciągu (a_n).

13.40. (R) Różnica między drugim a pierwszym wyrazem ciągu geometrycznego wynosi 5, zaś różnica między czwartym, a pierwszym wyrazem tego ciągu wynosi 35. Wyznacz pierwszy wyraz tego ciagu i jego iloraz.

13.41. (R) Wyznacz pierwsze trzy wyrazy ciągu geometrycznego wiedząc, że są one dodatnie, ich suma jest równa 21 oraz suma ich odwrotności jest równa $\frac{7}{12}$.

13.42. (R) Liczba x jest pierwiastkiem równania $2logx = log(4x-4)$ zaś z jest pierwiastkiem równania $3^{\frac{3z+4}{z-1}} = 81$.
a) Wyznacz liczbę y, tak aby liczby x, y, z były trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.
b) Znajdź sumę sześciu początkowych wyrazów powyższego ciągu geometrycznego.

13.43. (RR) **a)** Dla jakich wartości x ciąg geometryczny o ilorazie $q = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$ jest zbieżny?
b) Dla jakich wartości x szereg geometryczny $1 + \frac{1}{3x} + \frac{1}{9x^2} + \frac{1}{27x^3} + ...$ jest zbieżny? Oblicz sumę.

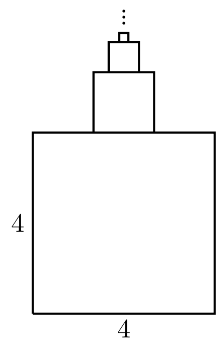
13.44. (RR) Dany jest ciąg określony rekurencyjnie:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 3 \cdot a_n + 2, \quad n \in \mathbb{N}^+. \end{cases}$$

Oblicz pięć początkowych wyrazów tego ciągu. Udowodnij metodą indukcji matematycznej, że powyższy ciąg można wyrazić wzorem ogólnym $a_n = 3^n - 1$ dla $n \in \mathbb{N}^+$.

13.45. (RR) Liczby $0,(1)$ i $0,0(5)$ są pierwszym i drugim wyrazem nieskończonego ciągu geometrycznego. Oblicz trzeci wyraz tego ciągu i zapisz go w postaci ułamka okresowego.

13.46. (RR) Górną podstawę kwadratu o boku długości 4 podzielono na trzy równe części i skonstruowano kwadrat, następnie górną podstawę kwadratu górnego podzielono na trzy równe części i znów skonstruowano kolejny kwadrat, itd.
a) Oblicz sumę obwodów wszystkich kwadratów.
b) Oblicz sumę pól wszystkich kwadratów.



13.47. (RR) Oblicz granicę ciągu:

a) $a_n = \frac{-4n^2+3n+1}{2+n+2n^2}$

b) $b_n = \frac{10n^2-2}{2-n+n^3}$

c) $c_n = \frac{6n^4+n^2-5}{2-n^3}$

d) $d_n = 8 + 2n^3 - 4n^5$

e) $e_n = 3 \cdot 4^n - 5^{n+1}$

f) $f_n = \sqrt{n-2} - \sqrt{n-4}$

g) $g_n = \sqrt[3]{\frac{n^3+2}{8n^3+n}}$

h) $h_n = \frac{3(n+2)!-n!}{(n+2)!+n!}$

i) $i_n = \frac{1+5+25+...+5^n}{3-5^{n+1}}$

j) $j_n = \frac{2^n+3^n}{(2\cdot3)^n}$

k) $k_n = \frac{1^2+2^2+3^2+...+n^2}{3n^3+2n-5}$ wiedząc, że $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

14 Geometria analityczna

14.1. Napisz równanie prostej:
a) $-6x + 3y + 2 = 0$ w postaci kierunkowej,
b) przechodzącej przez punkty $A = (-4, -2)$, $B = (5, 4)$,
c) nachylonej do osi OX pod kątem 120° i przechodzącej przez punkt $N = (-3, 2)$,
d) równoległej do prostej $l:\ 6x - y = 0$ i przechodzącej przez punkt $P = (-1, 1)$,
e) prostopadłej do prostej $l:\ \sqrt{2}x - y + 5 = 0$ i przechodzącej przez punkt $M = (2, 1)$.

14.2. Npisz równanie symetralnej odcinka AB, gdy $A = (-2, 2)$, $B = (2, 10)$.

14.3. Punkty $A = (5, -1)$, $B = (1, 1)$ są symetryczne względem pewnej prostej. Wyznacz jej równanie.

14.4. Dany jest punkt $C = (2, 3)$ i prosta o równaniu $y = 2x - 8$ będąca symetralną odcinka BC. Wyznacz współrzędne punktu B. Wykonaj obliczenia uzasadniające odpowiedź.

14.5. W układzie współrzędnych dane są dwa punkty: $A = (-2, 2)$ i $B = (4, 4)$.
a) Wyznacz równanie symetralnej odcinka AB.
b) Prosta AB oraz prosta o równaniu $3x - 2y - 11 = 0$ przecinają się w punkcie C. Oblicz współrzędne punktu C.

14.6. Oblicz odległość punktu A od środka odcinka BC, gdzie $A = (1, 3)$, $B = (4, 7)$, $C = (-2, -3)$.

14.7. Znajdź pole kwadratu, którego jednym z wierzchołków jest punkt $A = (1, -3)$, i którego przekątna zawiera się w prostej o równaniu $y = 2x$.

14.8. Wyznacz współrzędne punktu B symetrycznego do $A = (2, 3)$ względem prostej $x + 3y - 1 = 0$.

14.9. W układzie współrzędnych na płaszczyźnie zaznaczono punkty $A = (2, 0)$ i $B = (4, 0)$. Wyznacz wszystkie możliwe położenia punktu C, dla których ABC jest trójkątem równoramiennym o podstawie AB i polu równym 3.

14.10. Sprawdź algebraicznie, czy trójkąt o wierzchołkach $A = (5, -4)$, $B = (-1, 2)$, $C = (-4, -1)$ jest trójkątem prostokątnym.

14.11. Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A = (0, 4)$, $B = (5, 3)$ i $C = (4, 8)$. Wyznacz punkt przecięcia środkowej poprowadzonej z wierzchołka A z wysokością opuszczoną na bok AB.

14.12. Punkty $A = (6, 0), B = (1, 1)$ i C są wierzchołkami trójkąta ABC. Punkt C jest punktem przecięcia prostej o równaniu $y = x - 4$ z osia OY.
a) Napisz równanie prostej zawierającej bok AC tego trójkąta.
b) Uzasadnij, że ten trójkąt ma oś symetrii.
c) Oblicz pole tego trójkąta.

14.13. Wskaż równanie okręgu o środku w punkcie $S = (-1, 2)$ i promieniu $r = \sqrt{2}$:
(A) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 2$
(B) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = \sqrt{2}$
(C) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 2$
(D) $(x + 1)^2 - (y - 2)^2 = \sqrt{2}$.

14.14. Punkt $B = (-1, 9)$ należy do okręgu stycznego do osi OX w punkcie $A = (2, 0)$. Wyznacz równanie tego okręgu.

14.15. Punkty $A = (1, 1)$, $B = (5, 0)$, $C = (5, 7)$, $D = (1, 6)$ są wierzchołkami czworokąta.
a) Wyznacz współrzędne punktu przecięcia przekątnych tego czworokąta.
b) Oblicz pole czworokąta.
c) Czy na tym czworokącie można opisać okrąg?

14.16. Znajdź środek i promień okręgu opisanego na trójkącie ABC, gdy $A = (-4, -2)$, $B = (0, 4)$, $C = (8, 4)$.

14.17. Punkty $A = (2, 4)$, $B = (-2, 6)$, $C = (-2, 2)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Oblicz współrzędne wierzchołka D i obwód tego równoległoboku.

14.18. Prosta l tworzy z osią x kąt o mierze 45° i przechodzi przez punkt $M = (-2, 2)$. Prosta k, prostopadła do l, przecina oś x w punkcie o odciętej $x_0 = -3$.
a) Wyznacz równania prostych k i l.
b) Oblicz długość najdłuższego boku trójkąta, którego boki zawierają się w prostych l i k oraz w osi y.

14.19. Okrąg o_1 określony jest równaniem: $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$.
a) Napisz równanie okręgu o_2 współośrodkowego z okręgiem o_1, przechodzącego przez punkt $A = (6, 0)$.
b) Oblicz pole pierścienia kołowego ograniczonego okręgami o_1 i o_2.

14.20. Zbadaj położenie punktów względem koła:
a) $A = (2, 3)$, $B = (1, 4)$, $C = (-1, 1)$, $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 \leqslant 4$;
b) $A = (3, -2)$, $B = (2, 1)$, $C = (6, -2)$, $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 16 \leqslant 0$.

14.21. Napisz równanie okręgu:
a) o środku $S = (-1, -2)$ przechodzącego przez punkt $P = (0, 3)$,
b) o promieniu $r = 4$ stycznego do obu osi układu współrzędnych,
c) przechodzącego przez punkty $A = (5, 1)$ i $B = (2, -2)$, którego środek leży na prostej $y = 1$.

14.22. **Test wyboru.** Zaznacz poprawne odpowiedzi.

a) Wskaż współrzędne punktu C należącego do osi Y tak, aby proste AB i BC były prostopadłe, gdy $A = (-5, 2)$ i $B = (-2, 3)$.
(A) $(-3, 0)$ **(B)** $(0, 3)$ **(C)** $(0, -3)$ **(D)** $(0, 5)$

b) Prosta k równoległa do prostej $p:\ 5x - y + 2 = 0$ i przechodząca przez punkt $P = (1, -2)$, to:
(A) $5x - y + 3 = 0$ **(B)** $-5x + y + 7 = 0$ **(C)** $x + 5y + 3 = 0$ **(D)** $-x + 5y - 2 = 0$

c) Wskaż równanie prostej prostopadłej do prostej $l:\ 3x + y - 2 = 0$ i przechodzącej przez punkt $K = (-2, 1)$
(A) $-3x + y - 2 = 0$ **(B)** $x - 3y + 5 = 0$ **(C)** $-x + 3y + 3 = 0$ **(D)** $-x + 3y - 5 = 0$

d) Dany jest okrąg o równaniu $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 3$. Jakie są współrzędne środka i promień tego okręgu?
(A) $O = (3, -2),\ r = 3$,
(B) $O = (-3, 2),\ r = 3$,
(C) $O = (-3, -2),\ r = \sqrt{3}$,
(D) $O = (-3, 2),\ r = \sqrt{3}$.

e) Jaki zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej opisuje równanie $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 20 = 0$?
(A) zbiór pusty, **(B)** okrąg, **(C)** dwie proste, **(D)** płaszczyznę.

f) Jaki jest środek i promień okręgu o równaniu $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 3 = 0$?
(A) $O = (2, -1),\ r = 3$,
(B) $O = (-2, 1),\ r = \sqrt{3}$,
(C) $O = (-2, 1),\ r = 2$,
(D) $O = (-2, 1),\ r = \sqrt{2}$.

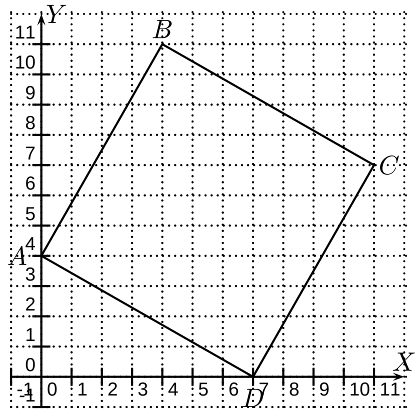
14.23. (R)Dane są punkty: $A = (-3, -1)$, $B = (-1, 0)$ i $C = (-2, 2)$. Oblicz współrzędne i długość wektora: $\overrightarrow{u} = 2 \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

14.24. (R) Niech $A = (-4, 3)$, $B = (2, 1)$, $C = (1, -3)$. Wyznacz współrzędne punktu D, tak aby wektor $\overrightarrow{CD}$ był wektorem przeciwnym do wektora $\overrightarrow{AB}$.

14.25. (R) Niech $A = (1, 3), B = (5, 1)$ oraz $C = (4, 3)$. Wyznacz współrzędne punktu M tak, aby $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - 2 \cdot \overrightarrow{BC}$. Oblicz długość wektora $\overrightarrow{AM}$ i współrzedne jego środka.

14.26. (R) **a)** Dla jakiej wartości m wektory $\overrightarrow{a} = [2, 3]$ i $\overrightarrow{b} = [-3, m]$ są równoległe.
b) Dobierz liczby k, l tak aby $k\overrightarrow{a} + l\overrightarrow{b} = \overrightarrow{c}$, gdy $\overrightarrow{a} = [2, 3]$, $\overrightarrow{b} = [-3, 2]$, $\overrightarrow{c} = [5, 5\frac{1}{3}]$.

14.27. (R) Rysunek przedstawia kwadrat $ABCD$, gdzie $A = (0, 4)$, $D = (7, 0)$.
a) Podaj współrzędne wektora $\overrightarrow{DC}$.
b) Podaj równanie prostej AD w postaci ogólnej.



14.28. (R) Punkty $A = (1, 1)$, $B = (5, 5)$, $C = (3, 5)$ są wierzchołkami trapezu równoramiennego ABCD niebędącego równoległobokiem, w którym $AB||CD$.
a) Wyznacz równanie osi symetrii tego trapezu.
b) Oblicz pole tego trapezu.

14.29. (R) Dane są punkty $A = (2, 3)$, $B = (5, 4)$. Na prostej o równaniu $y = 5$ wyznacz punkt C tak, aby łamana ACB miała jak najmniejszą długość. Odpowiedź uzasadnij.

14.30. (R) Punkty $M = (3, 1)$, $N = (6, 5)$ są kolejnymi wierzchołkami trapezu $KLMN$. Stosunek długości podstaw trapezu jest równy $1 : 2$. Dłuższa podstawa zawiera się w prostej o równaniu $4x - 3y - 8 = 0$. Oblicz pole trapezu.

14.31. (R) Wyznacz równanie okręgu o środku $A = (2, 3)$, stycznego do prostej o równaniu $x - 2y + 1 = 0$.

14.32. (R) Dane są punkty $A = (-4, 32)$ i $B = (-36, 16)$. Wykaż, że koło o średnicy AB jest zawarte w II ćwiartce prostokątnego układu współrzędnych.

14.33. (R) Wyznacz równania prostych przechodzących przez początek układu współrzędnych i stycznych do okręgu o środku w punkcie $S = (4, 0)$ i promieniu równym 2.

14.34. (R) Dane są figury:

$$F_1 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 - 6y \leqslant 0\},$$

$$F_2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge y \leqslant 6 - |x|\}.$$

a) Narysuj figury F_1, F_2 oraz figurę $F = F_1 \cap F_2$.
b) Oblicz pole figury F.

14.35. (R) Zilustruj w układzie współrzędnych zbiory A i B oraz oblicz pole figury $A \setminus B$, gdzie

$$A = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x^2 - 4y + y^2 \leqslant 5\},$$

$$B = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge y > |\sqrt{3}x| + 2\}.$$

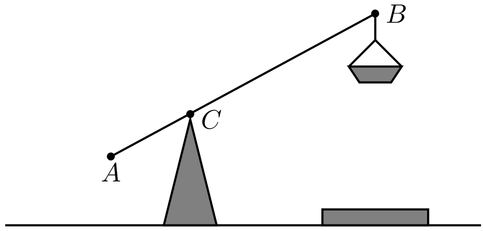
14.36. (R) Wyznacz promień okręgu o środku w początku układu współrzędnych stycznego zewnętrznie do okręgu
$x^2 + y^2 + 6x - 8y + 21 = 0$

14.37. (R) Napisz równanie okręgu symetrycznego do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 14x + 2y + 41 = 0$ względem prostej $y = 2x$.

15 Planimetria

15.1. W trójkącie równoramiennym ABC, w którym $|AC| = |BC| = 10$ cm, wysokość poprowadzona z wierzchołka C jest równa 5 cm. Oblicz miary kątów tego trójkąta. Odpowiedź podaj w stopniach.

15.2. W pewnym skansenie jest żuraw studzienny. Jego dźwignię AB podparto w punkcie C tak, że ramiona dźwigni mają długości: $|AC| = 2,4$ m i $|CB| = 7,2$ m. Koniec dźwigni początkowo znajdował się $0,5$ m poniżej poziomu punktu podparcia C, a następnie obrócono dźwignię tak, że koniec A znalazł się $0,5$ m powyżej poziomu punktu C. O ile metrów opuści się w tym czasie koniec B dźwigni?



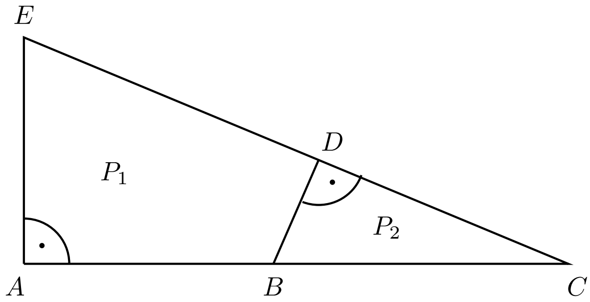
15.3. Na pewne wzgórze można wejść pokonując 50 schodów. Każdy schodek ma wysokość 30 cm, a jego powierzchnia użytkowa ma szerokość 40 cm. Oblicz w metrach wysokość h wzgórza i długość d poręczy wzdłuż linii schodów.

15.4. Dany jest prostokąt o bokach a i b. Zmniejszamy długość boku a o 10% oraz zwiększamy długość boku b o 20%.
a) O ile procent zwiększy się pole tego prostokąta?
b) Wyznacz długość boku b, dla której nowy prostokąt będzie miał taki sam obwód jak prostokąt wyjściowy, jeśli wiadomo, że bok a ma długość 30 cm.

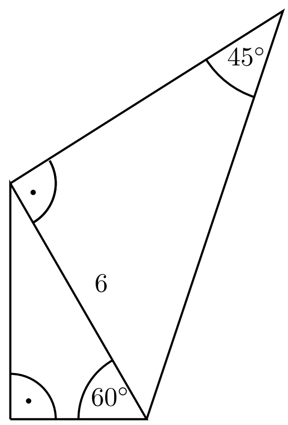
15.5. Dany jest trójkąt prostokątny ABC o przeciwprostokątnej AB, taki że $sin|\sphericalangle BAC| = 0,3$ i $|AC| = 7$. Oblicz pole koła opisanego na tym trójkącie.

15.6. W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna ma długość 12, a cosinus jednego z kątów ostrych wynosi $\frac{2}{3}$. Oblicz wysokość opuszczoną na przeciwprostokątną.

15.7. Państwo Nowakowie przeznaczyli 26000 zł na zakup działki. Do jednej z ofert dołączono rysunek dwóch przylegających do siebie działek w skali 1 : 1000. Jeden metr kwadratowy gruntu w tej ofercie kosztuje 35 zł. Oblicz, czy przeznaczona przez państwa Nowaków kwota wystarczy na zakup działki P_2.
$|AE| = 5$ cm,
$|EC| = 13$ cm,
$|BC| = 6,5$ cm.

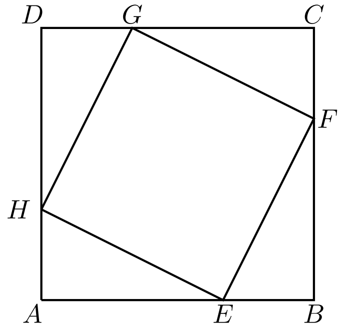


15.8. Przekątna czworokąta dzieli go na dwa trójkąty prostokątne.
a) Oblicz obwód tego czworokąta.
b) Jaką część pola czworokąta stanowi pole mniejszego trójkąta? Wynik podaj w zaokrągleniu do $0,1$.



15.9. Oblicz pole czworokąta wypukłego $ABCD$, w którym kąty wewnętrzne mają odpowiednio miary: $|\sphericalangle A| = 90°$, $|\sphericalangle B| = 75°$, $|\sphericalangle C| = 60°$, $|\sphericalangle D| = 135°$, a boki AB i AD mają długość 3 cm. Sporządź rysunek pomocniczy.

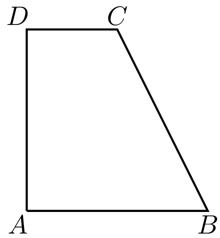
15.10. W kwadrat $ABCD$ wpisano kwadrat $EFGH$, jak pokazano na poniższym rysunku. Wiedząc, że $|AB| = 1$ oraz tangens kąta AEH równa się $\frac{2}{5}$, oblicz pole kwadratu $EFGH$.



15.11. Dany jest kwadrat o boku długości a. W prostokącie $ABCD$ bok AB jest dwa razy dłuższy niż bok kwadratu, a bok AD jest o 2 cm krótszy od boku kwadratu. Pole tego prostokąta jest o 12 cm^2 większe od pola kwadratu. Oblicz długość boku kwadratu.

15.12. Oblicz obwód rombu, którego pole jest równe 384, a stosunek długości przekątnych wynosi 3 : 4.

15.13. Długość ramienia BC trapezu prostokątnego jest dwa razy większa od różnicy długości jego podstaw. Kąt ABC ma miarę:
(A) 30°.
(B) 45°.
(C) 60°.
(D) 75°.



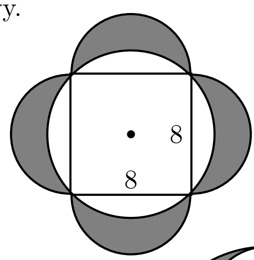
15.14. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD. Przekątne tego trapezu przecinają się w punkcie S. Wykaż, że $|SA| \cdot |SD| = |SB| \cdot |SC|$.

15.15. Obwód trapezu równoramiennego jest równy 44 cm, a długość dłuższej podstawy jest równa 20 cm. Oblicz pole tego trapezu, jeżeli wiadomo, że przekątna dzieli kąt ostry trapezu na połowy.

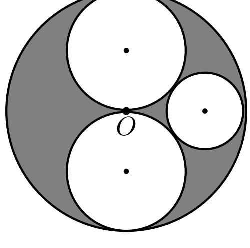
15.16. W trapezie prostokątnym dłuższa przekątna ma długość 12 cm i tworzy z dłuższym ramieniem kąt o mierze 30°, natomiast z krótszym ramieniem kąt o mierze 60°. Oblicz pole tego trapezu.

15.17. Dany jest trapez równoramienny, którego ramię ma długość 6 i jest nachylone do dłuższej podstawy pod kątem 60°. Podstawa ta ma długość 10.
a) Oblicz obwód i pole trapezu.
b) Oblicz długość przekątnej trapezu.
c) Oblicz odległość punktu przecięcia się przekątnych od dłuższej podstawy.

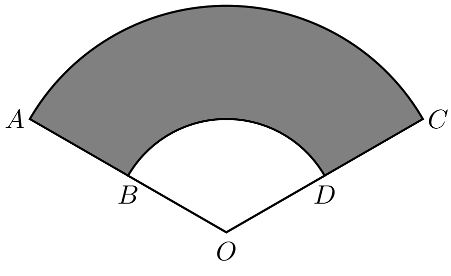
15.18. Oblicz obwód i pole zacieniowanego obszaru.



15.19. Dane są cztery okręgi parami styczne. Promień największego okręgu o środku O jest równy 2.
a) Oblicz długość promienia najmniejszego okręgu.
b) Oblicz pole zacieniowanego obszaru.



15.20. Rysunek przedstawia kształt obszaru zakreślonego przez wycieraczkę szyby samochodu. Kąt AOC ma miarę $2,5$ radiana oraz $|OB| = 20$ cm, a ramię BA wycieraczki ma długość 30 cm. Oblicz pole obszaru, który wyczyści wycieraczka.



15.21. Na trzech okręgach parami stycznych zewnętrznie, o promieniu 1 cm, opisano trójkąt równoboczny. Oblicz pole tego trójkąta.

15.22. W trójkąt równoramienny, w którym wysokość ma dlugość 10 cm, a kąt przy podstawie ma miarę $30°$, wpisano okrąg. Oblicz długość promienia tego okręgu.

15.23. Na trójkącie równoramiennym, o podstawie długości 8 cm i kącie przy podstawie $30°$, opisano okrąg. Oblicz długość promienia tego okręgu.

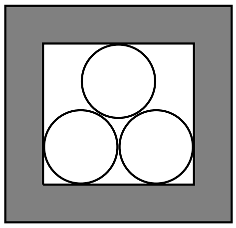
15.24. Dwa okręgi są styczne wewnętrznie, a trójkąt prostokątny ABC wpisany jest w większy okrąg. Średnica małego okręgu ma długość równą połowie przeciwprostokątnej trójkąta ABC.
a) Wyjaśnij dlaczego trójkąty ABC i OBE są podobne i podaj skalę podobieństwa (O - środek większego okręgu, E - punkt wspólny mniejszego okręgu i przyprostokątnej BC).
b) Oblicz stosunek pól tych trójkątów.

15.25. W okrąg o środku O i promieniu $R = 6$ cm wpisano czworokąt $ABCD$. Kąty środkowe: $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$ i $\sphericalangle DOA$ mają odpowiednio miary: $45°$, $150°$, $135°$ i $30°$. Oblicz pole czworokąta ABCD.

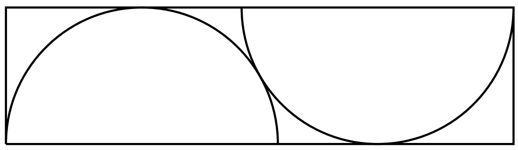
15.26. Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt o bokach długości $5, 5$ i 8.

15.27. Ostrokątny trójkąt równoramienny ABC o podstawie AB jest wpisany w okrąg o środku S, przy czym kąt SAB ma miarę $40°$. Oblicz miarę kąta CAB.

15.28. Szkic przedstawia kanał ciepłowniczy, którego przekrój poprzeczny jest prostokątem. Wewnątrz kanału znajduje się rurociąg składający się z trzech rur, każda o średnicy zewnętrznej 1 m. Oblicz wysokość i szerokość kanału ciepłowniczego. Wysokość zaokrąglij do $0,01$ m.



15.29. Z prostokąta o szerokości 60 cm wycina się detale w kształcie półkola o promieniu 60 cm. Sposób wycinania detali ilustruje rysunek. Oblicz najmniejszą długość prostokąta potrzebnego do wycięcia dwóch takich detali. Wynik zaokrąglij do pełnego centymetra.



15.30. Dany jest kwadrat. Pole koła opisanego na tym kwadracie jest o 8π większe od pola koła wpisanego w ten kwadrat. Oblicz pole kwadratu.

15.31. **Test wyboru.** Zaznacz poprawne odpowiedzi.

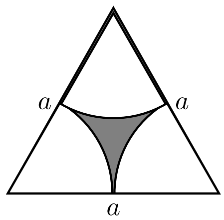
a) W trójkącie prostokątnym ABC kąt przy wierzchołku B wynosi $60°$. Dwusieczna tego kąta wyznacza na przyprostokątnej AC punkt D tak, że $|BD| = a$ (cm). Obwód trójkąta ABC wynosi:
(A) $\frac{3}{2}a(\sqrt{3}+1)$ cm **(B)** $3\sqrt{3}$ cm **(C)** $3\sqrt{3}a + 1$ cm **(D)** $(\sqrt{3}+3)a$ cm

b) W prostokącie stosunek długości boków wynosi 2, a przekątna ma długość 5 cm. Pole prostokąta wynosi:
(A) $2\sqrt{5}$ cm^2 **(B)** 5 cm^2 **(C)** 10 cm^2 **(D)** $5\sqrt{2}$ cm^2

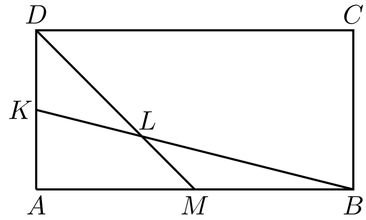
c) W trapezie równoramiennym podstawy mają długości 6 cm i 4 cm, a jego pole powierzchni 25 cm^2. Odległość pun ktu przecięcia przekątnych trapezu od dłuższej podstawy wynosi:
(A) 3 cm **(B)** 2 cm **(C)** 5 cm **(D)** 4 cm

d) Obwody dwóch trójkątów podobnych są równe 12 cm i 36 cm, a suma pól tych trójkątów - 60 cm^2. Pola tych trójkątów wynoszą:
(A) 24 cm^2 i 36 cm^2 **(B)** 20 cm^2 i 40 cm^2 **(C)** 30 cm^2 i 30 cm^2 **(D)** 6 cm^2 i 54 cm^2

e) Dany jest trójkąt równoboczny o boku długości a. Z każdego wierzchołka trójkąta zakreślono koło o promieniu $\frac{a}{2}$. Pole powstałej figury wynosi:
(A) $\frac{a^2}{8}(2\sqrt{3}-\pi)$ **(B)** $\frac{a^2}{8}\sqrt{3}$ **(C)** $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}\pi$ **(D)** $a^2(\pi-\sqrt{3})$.



f) W prostokącie $ABCD$ przeciwległe wierzchołki połączono ze środkami boków. Stosunek powierzchni czworokąta $AMLK$ do powierzchni czworokąta $BCDL$ wynosi:
(A) $\frac{2}{3}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{1}{4}$ **(D)** $\frac{1}{3}$

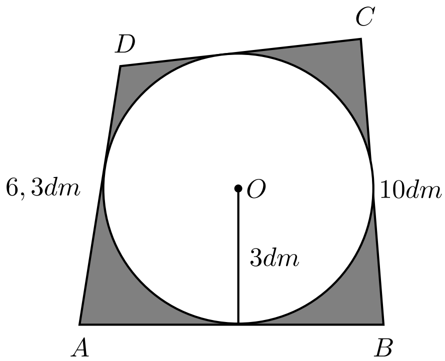


g) Okręgi o promieniach 6 i 8 są styczne. Jaka jest odległość między środkami tych okręgów?
(A) 3 lub 4 **(B)** 2 lub 8 **(C)** 6 lub 8 **(D)** 2 lub 14

15.32. (R) Na kole opisany jest romb. Stosunek pola koła do pola rombu wynosi $\frac{\pi\sqrt{3}}{8}$. Wyznacz miarę kąta ostrego rombu.

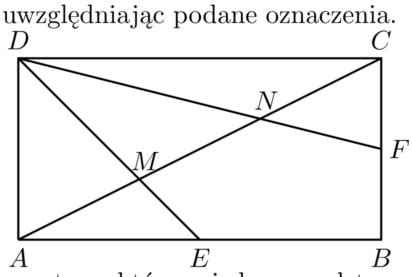
15.33. (R) Proste zawierające ramiona BC i DA trapezu $ABCD$ przecinają się w punkcie S. Dane są: $|AB|=6$, $|CD|=2$ oraz obwód trójkąta SCD równy $\sqrt{18}$. Oblicz obwód trójkąta SAB.

15.34. (R) Z kawałka materiału o kształcie i wymiarach czworokąta ABCD (patrz na rysunek obok) wycięto okrągłą serwetkę o promieniu 3 dm. Oblicz, ile procent całego materiału stanowi jego niewykorzystana część. Wynik podaj z dokładnością do 0,01 procenta.



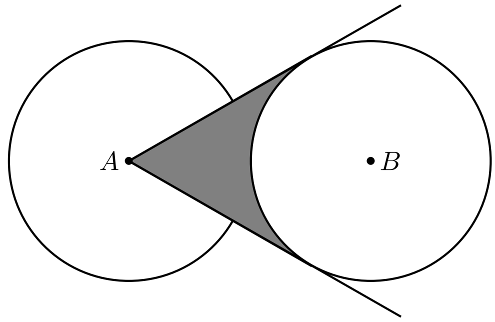
15.35. (R) W trójkącie prostokątnym ABC ($|\sphericalangle BCA| = 90°$) dane są długości przyprostokątnych: $|BC| = a$ i $|CA| = b$. Dwusieczna kąta prostego tego trójkąta przecina przeciwprostokątną AB w punkcie D. Wykaż, że długość odcinka CD jest równa $\frac{a\cdot b}{a+b}\cdot\sqrt{2}$. Sporządź pomocniczy rysunek uwzględniając podane oznaczenia.

15.36. (R) W prostokącie $ABCD$ wierzchołek D połączono odcinkami ze środkami E i F boków AB i BC, zaś M i N to punkty przecięcia tych odcinków z przekątną AC (patrz rysunek).
a) Uzasadnij, że odcinki AM, MN i NC są jednakowej długości.
b) Uzasadnij, że trójkąty AEM i CNF mają równe pola.



15.37. (R) **a)** Grupa sześciu przyjaciół kupiła tort w kształcie graniastosłupa prostego, którego jedną z podstaw jest trójkąt równoramienny ABC. W trakcie dyskusji - jak podzielić tort na 6 „równych” części, Krysia przypomniała sobie własność środkowych dowolnego trójkąta i przecięła tort wzdłuż środkowych narysowanych na powierzchni tortu (trójkąta ABC). Czy Krysia miała rację? Odpowiedź uzasadnij.
b) Dany jest taki czworokąt wypukły $ABCD$, że okręgi wpisane w trójkąty ABC i ADC są styczne. Wykaż, że w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrag.

15.38. (R) Trójkąt prostokątny ABC, w którym $|\sphericalangle BCA| = 90°$ i $|\sphericalangle CAB| = 30°$ jest opisany na okręgu o promieniu $\sqrt{3}$. Oblicz odległość wierzchołka C trójkąta od punktu styczności tego okręgu z przeciwprostokątną. Wykonaj odpowiedni rysunek.



15.39. (R) Dwa okręgi, każdy o promieniu 8, są styczne zewnętrznie. Ze środka jednego z nich poprowadzono styczne do drugiego okręgu. Oblicz pole zacieniowanej figury (patrz rysunek).

15.40. (R) Dany jest równoległobok o bokach długości 16 i 10 oraz kącie ostrym 30°.
Oblicz:
a) długość dłuższej wysokości rónoległoboku,
b) długość krótszej przekątnej równoległoboku.

15.41. (R) W pewnym trapezie kąty przy dwóch przeciwległych wierzchołkach mają miary α oraz $90° + \alpha$. Jedno z ramion tego trapezu ma długość t. Wyznacz różnicę długości podstaw tego trapezu.

15.42. (R) Oblicz miary kątów dowolnego czworokąta wpisanego w okrąg o promieniu $R = 5\sqrt{2}$, wiedząc ponadto, że jedna z przekątnych tego czworokąta ma długość 10, zaś iloczyn sinusów wszystkich jego kątów wewnętrznych równa się $\frac{3}{8}$.

15.43. (R) Na okręgu opisano trapez prostokątny, którego długości ramion są równe 24 cm i 25 cm. Oblicz:
a) długości podstaw trapezu,
b) pole trapezu,
c) długości przekątnych trapezu,
d) długość okręgu,
e) o ile procent obwód trapezu jest większy od długości okręgu,
f) pole części trapezu znajdujące się poza kołem,
g) stosunek pola trapezu do pola koła.

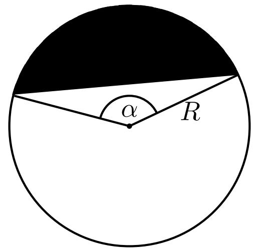
15.44. (R) Na okręgu o promieniu r opisano trapez równoramienny $ABCD$ o dłuższej podstawie AB i krótszej CD. Punkt styczności S dzieli ramię BC tak, że $\frac{|CS|}{|SB|} = \frac{2}{5}$.
a) Wyznacz długość ramienia tego trapezu.
b) Oblicz cosinus $|\sphericalangle CBD|$.

15.45. (R) Miary trzech kolejnych kątów czworokąta wpisanego w okrąg tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy $r = 52°32'$. Oblicz miary wszystkich kątów wewnętrznych tego czworokąta.

15.46. (R) Pole wycinka koła o promieniu 3 cm jest równe 2 cm^2. Oblicz miarę łukową kąta środkowego tego wycinka.

15.47. (R) Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Dane są $|BC| = a$, $|CD| = b$, $|\sphericalangle DAB| = \alpha$. Wyznacz długość przekątnej BD.

15.48. (R) Pole figury ograniczonej okręgiem opisanym na sześciokącie foremnym i brzegiem sześciokąta jest równe $4\pi - 6\sqrt{3}$. Wyznacz:
a) długość boku tego sześciokąta foremnego,
b) długość tego okręgu.



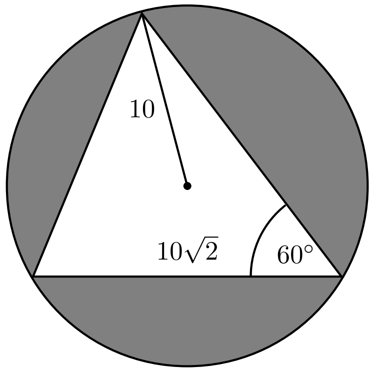
15.49. (R) Uzasadnij, że pole odcinka koła przedstawionego na rysunku można obliczyć według wzoru:

$$S = \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{180} \cdot \alpha - sin\alpha\right).$$

15.50. (R) Boki trójkąta mają długości $5, 3\sqrt{2}, \sqrt{13}$. Wyznacz miarę kąta znajdującego się naprzeciw najkrótszego boku oraz pole trójkąta.

15.51. (R) W trójkącie ABC, o kącie rozwartym przy wierzchołku C dane są długości boków $|AC| = 5$ cm i $|BC| = 12$ cm. Oblicz długość boku AB wiedząc, że pole trójkąta jest równe 24 cm^2.

15.52. (R) Oblicz pole zacieniowanej figury.

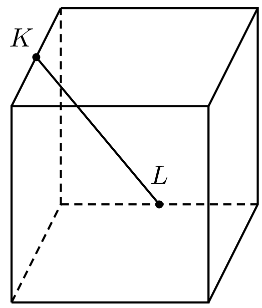


15.53. (R) Oblicz długość środkowej trójkąta opuszczonej na bok o długości 8, gdy pozostałe boki mają długość 6 i 7.

15.54. (R) Udowodnij twierdzenie: „Jeżeli w trójkąt prostokątny wpiszemy okrąg, to iloczyn długości odcinków, na które dzieli przeciwprostokątną punkt styczności z okręgiem równa się polu tego trójkąta."

16 Stereometria

16.1. Oblicz długość odcinka KL łączącego środki dwóch krawędzi sześcianu, którego krawędź ma długość 6.



16.2. Przekątna d prostopadłościanu o podstwie kwadratowej jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $\alpha = 60°$. Krawędź podstawy ma długość 4.
a) Wyznacz długość przekątnej d.
b) Oblicz objętość tego prostopadłościanu.
c) Zaznacz na rysunku kąt nachylenia przekątnej d do ściany bocznej prostopadłościanu.

16.3. W graniastosłupie czworokątnym prawidłowym przekątna o długości m jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α. Wiadomo, że $sin\alpha = 0,2$. Wyznacz objętość tego graniastosłupa.

16.4. W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym przekątna podstawy ma długość 8 cm i tworzy z przekątną ściany bocznej, z którą ma wspólny wierzchołek kąt, którego cosinus jest równy $\frac{2}{3}$. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

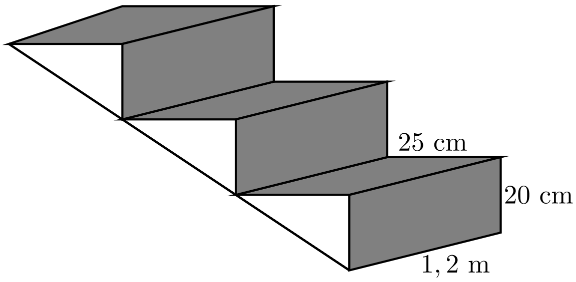
16.5. Dany jest graniastosłup czworokątny prosty $ABCDEFGH$ o podstawach $ABCD$ i $EFGH$ oraz krawędziach bocznych AE, BF, CG, DH. Podstawa $ABCD$ graniastosłupa jest rombem o boku długości 8 cm i kątach ostrych A i C o mierze 60°. Przekątna graniastosłupa CE jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Sporządź rysunek pomocniczy i zaznacz na nim wymienione w zadaniu kąty. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

16.6. Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny o podstawach ABC i $A'B'C'$ oraz krawędziach bocznych AA', BB', CC'. Kąt między przekątną ściany bocznej AC' a krawędzią podstawy AC ma miarę α. Promień okręgu wpisanego w podstawę graniastosłupa ma długość r. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

16.7. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość graniastosłupa wiedząc, że ma on 18 krawędzi i każda z nich jest równa 4cm.

16.8. Należy dwukrotnie pomalować powierzchnię boczną pięciu kolumn mających kształt graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź podstawy jest równa 40 cm, a wysokość 5 m. Przy pierwszym malowaniu litr farby wystarcza na pokrycie 10 m^2 powierzchni, a przy drugim - zużyto o 20% farby mniej. Ile należy kupić pięciolitrowych puszek farby?

16.9. Schody składają się z 15 jednakowych betonowych stopni, których wymiary podano na rysunku. Oblicz objętość betonu zużytego na ich wykonanie.

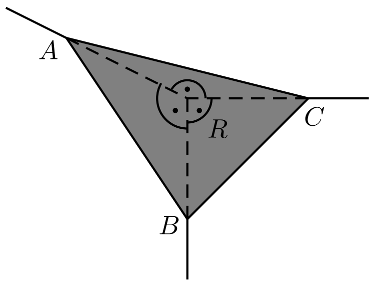


16.10. Dach wieży ma kształt powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 4 m. Ściana boczna tego ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°.
a) Sporządź pomocniczy rysunek i zaznacz na nim podane w zadaniu wielkości.
b) Oblicz, ile sztuk dachówek należy kupić, aby pokryć ten dach, wiedząc, że do pokrycia 1 m^2 potrzebne są 24 dachówki. Przy zakupie należy doliczyć 8% dachówek na zapas.

16.11. W ostrosłupie czworokątnym prawidłowym wysokości przeciwległych ścian bocznych poprowadzone z wierzchołka ostrosłupa mają długości h i tworzą kąt o mierze 2α. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

16.12. Pole powierzchni całkowitej prawidłowego ostrosłupa trójkątnego równa się $144\sqrt{3}$, a pole jego powierzchni bocznej $96\sqrt{3}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

16.13. Narożnik między dwiema ścianami i sufitem prostopadłościennego pokoju należy zamaskować trójkątnym fragmentem płyty gipsowo-kartonowej (patrz rysunek). Wiedząc, że $|RA| = |RB| = |RC| = 1$ m, oblicz objętość narożnika zamaskowanego tą płytą. Wynik zaokrąglij do $0,01$ m^3.



16.14. Każda krawędź boczna ostrosłupa ma długość 17 cm. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 18 cm i 24 cm. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

16.15. Prostokąt $ABCD$ obracając się wokół boku AB, zakreślił walec w_1. Ten sam prostokąt obracając się wokół boku AD, zakreślił walec w_2. Otrzymane walce mają równe pola powierzchni całkowitych. Wykaż, że prostokąt $ABCD$ jest kwadratem.

16.16. Pojemnik do przechowywania gazu ma kształt walca, o wysokości 3 m, zakończonego z obu stron półkolistymi kopułami. Wiedząc, że pole jego powierzchni całkowitej jest równe 4π m^2, oblicz objętość pojemnika.

16.17. Piętrowy tort przygotowany na bal maturalny składał się z pięciu warstw, z których każda miała kształt walca. Długości promieni walców, wyrażone w cm były kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego o różnicy $a = -5$. Długość promienia podstawy środkowej warstwy tego tortu była równa 20 cm, a jej objętość 3200π cm^3. Wszystkie warstwy wykonane były z tego samego rodzaju ciasta i miały jednakową wysokość. Oblicz, ile mąki należało przygotować do wypieku całego tortu, jeżeli receptura przewiduje wykorzystanie $0,24$ kg mąki do wypieku warstwy środkowej.

16.18. Metalową kulę o promieniu 10 cm oraz stożek, w którym średnica i wysokość wynoszą odpowiednio 16 cm i 12 cm przetopiono. Następnie z otrzymanego metalu wykonano walec o średnicy $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ cm. Oblicz wysokość walca.

16.19. Powierzchnią boczną stożka jest wycinek koła o kącie 240° i promieniu 12 cm. Oblicz pole podstawy tego stożka.

16.20. Poziom wody w zbiorniku w kształcie stożka, o średnicy 60 cm i tworzącej 50 cm, sięga połowy jego wysokości. Do zbiornika wlewamy wodę w tempie 25 cm^3/s. Po ilu minutach zbiornik będzie pełny? (Do obliczeń przyjmij $\pi \approx 3$.)

16.21. Kapsuła lądownika ma kształt stożka zakończonego w podstawie półkulą o tym samym promieniu co promień podstawy stożka. Wysokość stożka jest o 1 m większa niż promień półkuli. Objętość stożka stanowi $\frac{2}{3}$ objętości całej kapsuły. Oblicz objętość kapsuły lądownika.

16.22. W wyniku pełnego obrotu trójkąta prostokątnego, o przyprostokątnej $3\sqrt{3}$ i przeciwprostokątnej 6, wokół prostej zawierającej krótszą przyprostokątną otrzymujemy bryłę. Oblicz objętość tej bryły i wyznacz kąt nachylenia tworzącej do płaszczyzny podstawy.

16.23. W wyniku pełnego obrotu trójkąta prostokątnego, równoramiennego, o przyprostokątnej długości 6, wokół prostej zawierającej przeciwprostokątną otrzymujemy bryłę obrotową. Oblicz jej objętość i pole powierzchni.

16.24. Wzór na objętość stożka ściętego ma postać

$$V = \frac{1}{3}\pi h\left(R^2 + Rr + r^2\right),$$

gdzie R oznacza promień dolnej podstawy stożka, r - promień górnej podstawy stożka i h - wysokość stożka ściętego.
Pewne naczynie ma kształt stożka ściętego, w którym $R = 4, r = 2$ oraz $h = 6$. Naczynie zostało wypełnione wodą do połowy wysokości. Jaki procent objętości całego naczynia stanowi objętość wody? Wynik podaj w zaokrągleniu do $0,1\%$.

16.25. Metalową kulę o promieniu $R = 5$ cm w całości przetopiono na kuleczki o promieniu $r = 0,25$ cm. Ile uzyskano w ten sposób kuleczek?

16.26. Przyjmując, że Ziemia jest kulą o promieniu $r = 6370$ km, oblicz jej pole powierzchni. Jaki procent powierzchni Ziemi stanowi powierzchnia lądów a jaki powierzchnia Polski, gdy łączna powierzchnia lądów jest równa 149 mln km^2 a Polski wynosi 322,6 tys. km^2.

16.27. **a)** Dane są dwie kule. Objętość pierwszej kuli jest równa 36π cm^3, a druga kula ma promień dwa razy dłuższy od promienia pierwszej kuli. Podaj objętość drugiej kuli. Jaki jest stosunek pól powierzchni tych kul?
b) Po dopompowaniu powierzchnia kulistego balonu zwiększyła się o 44%. O ile wzrosła objętość balonu?

16.28. **a)** W kulę o promieniu 8 cm wpisano walec o promieniu podstawy 4cm. Oblicz objętość walca.
b) Na sześcianie o krawędzi długości a opisano kulę w ten sposób, że wierzchołki sześcianu należą do powierzchni kuli. Oblicz objętość kuli.
c) W ostrosłup prawidłowy czworokątny wpisano kulę o promieniu 2. Ściany boczne ostrosłupa są nachylone do jego podstawy pod kątem 60°. Oblicz długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa.

16.29. **Test wyboru.** Zaznacz poprawne odpowiedzi.

a) Sześcian o krawędzi 4 i graniastosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy 2 mają taką samą objętość. Wówczas:
(A) wielościany te mają takie samo pole powierzchni całkowitej,
(B) wysokość graniastosłupa jest równa 8
(C) pole ściany bocznej graniastosłupa jest dwa razy większe od pola ściany sześcianu.

b) Podstawą prostopadłościanu jest kwadrat o boku 1, a kąt nachylenia przekątnej prostopadłościanu do ściany bocznej ma miarę 30°. Zatem:
(A) wysokość tego prostopadłościanu jest równa $\sqrt{2}$,
(B) przekątna tego prostopadłościanu ma długość 2,
(C) przekątna tego prostopadłościanu jest nachylona do płaszczyzny jego podstawy pod kątem 45°.

c) W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym o krawędzi podstawy 2 pole podstawy jest dwa razy mniejsze od pola powierzchni bocznej. Wtedy:
(A) wysokość jego ściany bocznej jest równa $2\sqrt{3}$,
(B) jego ściana boczna jest nachylona do podstawy pod kątem 30°,

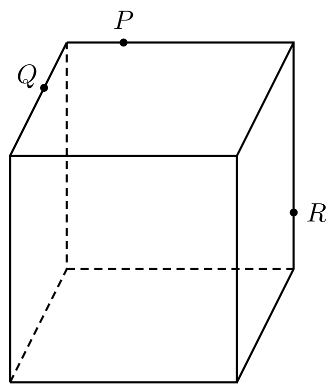
(C) wysokość tego ostrosłupa jest równa 3.

d) Pole powierzchni całkowitej czworościanu foremnego jest równe $16\sqrt{3}$. Zatem:
(A) jego krawędź ma długość 4,
(B) wysokość tego czworościanu jest równa $4\sqrt{6}$,
(C) jego krawędź boczna tworzy z podstawą kąt α, taki że $tg\alpha = \sqrt{2}$.

d) Powierzchnia boczna walca po rozwinięciu jest kwadratem o przekątnej $3\sqrt{2}$. Zatem:
(A) pole powierzchni bocznej tego walca jest równe 18,
(B) wysokość tego walca jest równa 3,
(C) w walec ten można wpisać kulę.

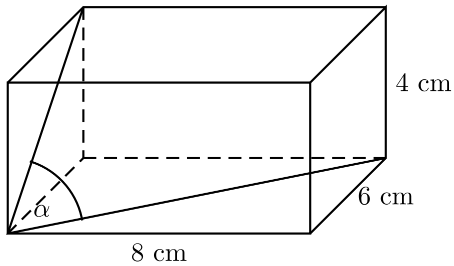
f) Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o boku 12. Wtedy:
(A) pole powierzchni bocznej tego stożka jest równe 72π,
(B) objętość tego stożka jest równa $72\sqrt{3}\pi$,
(C) promień kuli wpisanej w ten stożek jest równy $4\sqrt{3}$.

16.30. (R) Narysuj przekrój równoległościanu płaszczyzną PQR.



16.31. (R) W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym pole podstawy równa się $12\sqrt{3}$. Pole przekroju płaszczyzną zawierającą krawędź podstawy i wierzchołek górnej podstawy: $20\sqrt{3}$. Oblicz sinus kąta nachylenia płaszczyzny tego przekroju do płaszczyzny podstawy graniastosłupa.

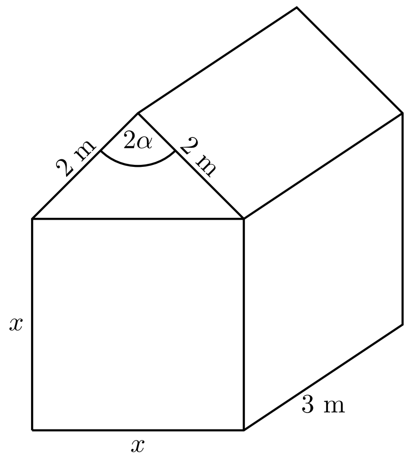
16.32. (R)Prostopadłościenne pudełko ma wymiary 8cm×6cm×4cm. Wyznacz miarę kąta α w zaokrągleniu do 1° między przekątną podstawy pudełka, a przekątną tej ściany bocznej, która ma wymiary 6 cm×4 cm.



16.33. (R) Oblicz pole przekroju sześcianu o krawędzi a płaszczyzną zawierającą przekątną jednej ściany i środki dwóch krawędzi przeciwległej ściany.

16.34. (R) Oblicz odległość wierzchołka sześcianu, którego krawędź ma długość a, od tej przekątnej sześcianu, do której ten wierzchołek nie należy.

16.35. (R) Drewutnia ma kształt prostopadłościanu, nakrytego dwuspadowym dachem. Wymiary drewutni przedstawiono na rysunku.
a) Wyznacz objętość użytkową drewutni (objętość prostopadłościanu w m^3) jako funkcję α.
b) Dla jakiego kąta $\alpha \in \langle \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6} \rangle$ objętość użytkowa drewutni jest największa?



16.36. (R) W kulę o promieniu $R = 4$ wpisano sześcian. Oblicz jaki procent objętości kuli stanowi objetość sześcianu. Wynik podaj z zaokrągleniem do 1%.

16.37. (R) Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest kwadrat $ABCD$ o boku długości 4. Odcinek DS jest wysokością ostrosłupa i ma długość 6. Punkt M jest środkiem odcinka DS. Oblicz pole przekroju ostrosłupa płaszczyzną BCM.

16.38. (R) Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest prostokąt $ABCD$, w którym $|AB| = 1$, $|BC| = \sqrt{2}$. Wszystkie krawędzie boczne tego ostrosłupa mają długość 1. Wyznacz wartość dowolnej funkcji trygonometrycznej kąta między dwiema sąsiednimi ścianami bocznymi tego ostrosłupa.

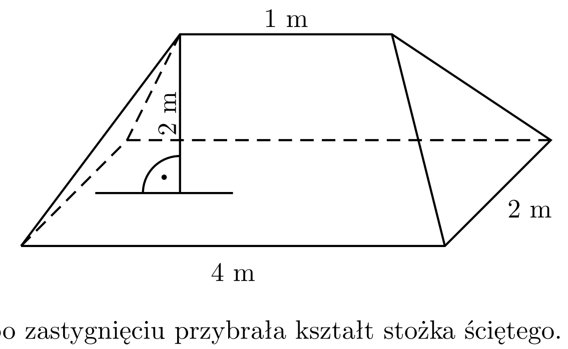
16.39. (R) Trójkąt ABC jest podstawą ostrosłupa $ABCS$. Punkt M jest środkiem boku AB i $|AM| = |MC|$. Odcinek AS jest wysokością tego ostrosłupa. Wykaż, że kąt SCB jest prosty.

16.40. (R) Wierzchołek namiotu w kształcie czworokątnego ostrosłupa prawidłowego jest podtrzymywany przez maszt o długości $1,5$ m. Wyznacz długość krawędzi jego podstawy, wiedząc, że pole powierzchni materiału zużytego na uszycie tego namiotu wraz z podłogą (pomijamy szfy) jest równa 8 m^2.

16.41. (R) Podstawą ostrosłupa o wysokości h jest trójkąt równoboczny. Dwie ściany boczne tego ostrosłupa są prostopadłe do podstaw, a trzecia tworzy z podstawą kąt o mierze α. Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

16.42. (R) Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokatnego ma długość $a = 4$, zaś krawędź boczna $b = 7$.
a) Oblicz objętość tego ostrosłupa.
b) Wyznacz cosinus kąta między krawędziami bocznymi nie należącymi do jednej ściany bocznej tego ostrosłupa.

16.43. (R) Oblicz objętość narysowanej pryzmy, której krawędzie boczne są równej długości.



16.44. (R) Do salaterki wlano rozpuszczoną galaretkę, która po zastygnięciu przybrała kształt stożka ściętego. Przekrój osiowy tej bryły był trapezem równoramiennym o wysokości 6 cm i podstawach długości 14 cm i 26 cm. Oblicz objętość wlanego płynu. W obliczeniach przyjmij, że $\pi = 3,14$, a wynik podaj z zaokrągleniem do 1 cm^3.

16.45. (R) Pole powierzchni kuli wpisanej w stożek jest równe polu podstawy. Oblicz:
a) stosunek pola powierzchni kuli do pola powierzchni bocznej stożka,
b) jaką częścią objętości stożka jest objetość kuli?

16.46. (R) Trójkąt równoramienny o obwodzie równym 16 cm obraca się dookoła podstawy. Dla jakiej długości boków trójkąta objętość otrzymanej bryły bedzie maksymalna?

16.47. (RR) Przekątna przekroju osiowego walca ma długość równą $2\sqrt{3}$. Jaką największą objętość może mieć ten walec?

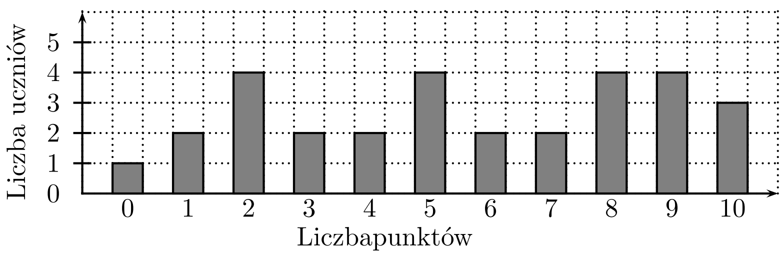
16.48. (RR) W stożek, którego wysokość ma długość $H = 12$ dm, a promień jego podstawy ma długość $R = 4$ dm wpisano walec, o podstawach równoległych do podstawy stożka. Jakie powinny być wymiary walca, aby jego objętość była największa?

16.49. (RR) Wśród wszystkich graniastosłupów prawidłowych trójkątnych o objętości równej 2 m^3 istnieje taki, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze. Wyznacz długości krawędzi tego graniastosłupa.

17 Statystyka

17.1. Nauczyciele informatyki, chcąc wyłonić reprezentację szkoły na wojewódzki konkurs informatyczny, przeprowadzili w klasach I A i I B test z zakresu poznanych wiadomości. Każdy z nich przygotował zestawienie wyników swoich uczniów w innej formie. Na podstawie analizy przedstawionych poniżej wyników obu klas:
a) oblicz średni wynik z testu każdej klasy,
b) oblicz, ile procent uczniów klasy I B uzyskało wynik wyższy niż średni w swojej klasie,
c) podaj medianę wyników uzyskanych w klasie I A.

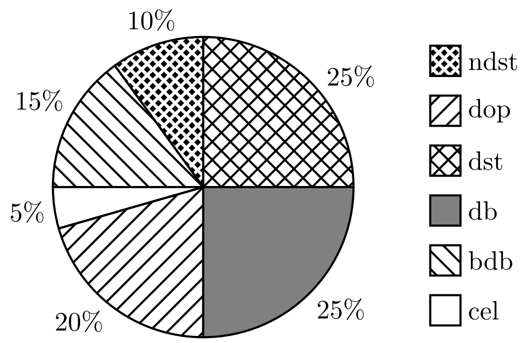
Wyniki testu informatycznego uczniów kl. I A



Wyniki testu informatycznego uczniów kl. I B

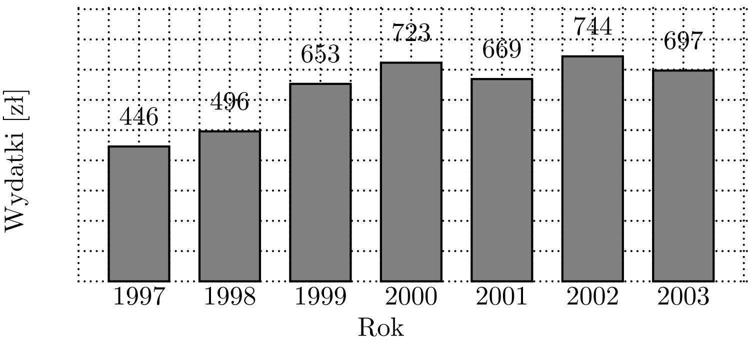
L. punktów	L. uczniów
0	1
1	2
2	1
3	2
4	1
5	2
6	4
7	4
8	1
9	2
10	5

17.2. Wojtek otrzymał w ciągu jednego roku szkolnego 20 ocen z języka polskiego. Częstość poszczególnych ocen przedstawiono na diagramie kołowym. Oblicz średnią, modę i medianę zestawu ocen Wojtka.



17.3. Średnia arytmetyczna liczb: $11, 12, 8, 11, x, 3, 4, 6, 8, 8$ jest równa $8,5$.
a) Wyznacz x.
b) Wyznacz medianę tych liczb.

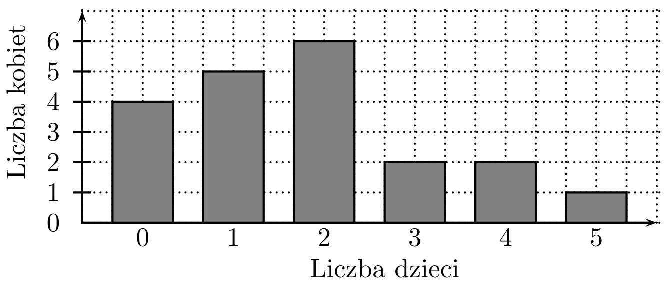
17.4. Diagram przedstawia średnie wydatki rodziców związane z początkiem roku szkolnego.
a) Oblicz średnią wydatków w latach od 2001 do 2003.
b) Jaką kwotę wydano w 2002 roku na podręczniki, jeśli wiadomo, że pochłonęły one wtedy 51% wydatków? Wynik podaj w zaokrągleniu do 1 zł.
c) Wyznacz medianę podanego zbioru wydatków.
d) O ile procent mniej w porównaniu z rokiem 2002 wyniosły wydatki w roku 2003?



17.5. Cztery babcie grały w brydża. Średnia ich wieku wynosiła 74 lata. Gdy po pierwszym robrze babcia Matylda zrezygnowała z gry, pozostałe babcie grały „z dziadkiem”, a średnia wieku grających zmniejszyła się o 2 lata. Trzeciego robra wytrwale rozegrały już z dziadkiem Stefanem, który miał 76 lat. Ile lat ma babcia Matylda? Jaka jest średnia wieku rozgrywających trzeciego robra?

17.6. Wzrost zawodniczek reprezentacji Polski w siatkówce wynosi w centymetrach: 173, 176, 179, 180, 180, 182, 183, 187, 191, 191, 192, 194. Oblicz średni wzrost siatkarek oraz wariancję i odchylenie standardowe ich wzrostu. Wynik podaj w zaokrągleniu do $0,01$.

17.7. Każdą z dwudziestu kobiet zapytano o liczbę posiadanych dzieci. Otrzymane wyniki przedstawiono na histogramie. Oblicz średnią liczbę dzieci posiadanych przez jedną kobietę oraz odchylenie standardowe liczby dzieci.



17.8. Oblicz średnią arytmetyczną, wariancję i odchylenie standardowe podanego zestawu danych za pomocą tabelki częstość występowania liczby pestek w winogronach. Wynik podaj w zaokrągleniu do $0,1$.

Liczba pestek	0	1	2	3
Liczba owoców	5	50	35	10

17.9. Wśród uczniów pewnej klasy maturalnej dokonano pomiaru ilorazu inteligencji IQ i przedstawiono jego wyniki w poniższej tabeli:

Pomiary ilorazu IQ	127	128	130	132	134	136	140	142	144	148	149	151	153
Liczba wskazań	1	1	1	2	2	5	2	2	3	2	2	2	3

a) Wyznacz średnią, medianę i modę ilorazu inteligencji ucznia badanej klasy.
b) Oblicz wariancję i odchylenie standardowe tej próbki danych. Wynik podaj w zaokrągleniu do $0,01$.

17.10. Do matury z matematyki na poziomie rozszerzonym przystąpiło 10 uczniów. Wyniki przedstawia tabela:

Liczba punktów	9	16	26	33	35	42	47	50
Liczba uczniów	1	2	2	1	1	1	1	1

a) Oblicz średnią arytmetyczną uzyskanych wyników.
b) Oblicz medianę i modę tego zestawu danych.
c) Oblicz wariancję i odchylenie standardowe.
d) Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:
A - losowo wybrany maturzysta zdobył na maturze nie mniej niż 40 pkt,
B - losowo wybrany maturzysta zdobył na maturze mniej niż 15 pkt,
C - losowo wybrany maturzysta zdobył na maturze nie mniej niż 20 pkt i nie więcej niż 40 pkt,
D - losowo wybrany maturzysta zdobył na maturze mniej niż 8 pkt.

17.11. Kostka masła produkowanego przez pewien zakład mleczarski ma nominalną masę 20 dag. W czasie kontroli zakładu zważono 150 losowo wybranych kostek masła. Wyniki badań przedstawiono w tabeli.

Masa kostki masła (w dag)	16	18	19	20	21	22
Liczba kostek masła	1	15	24	68	26	16

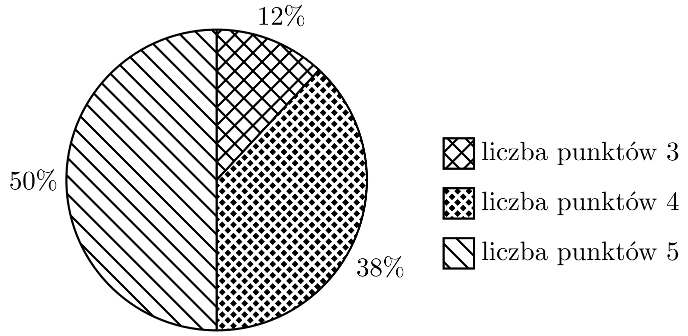
a) Na podstawie danych przedstawionych w tabeli oblicz średnią arytmetyczną oraz odchylenie standardowe masy kostki masła.
b) Kontrola wypada pozytywnie, jeśli średnia masa kostki masła jest równa masie nominalnej i odchylenie standardowe nie przekracza 1 dag. Czy kontrola zakładu wypadła pozytywnie? Odpowiedź uzasadnij.

17.12. W poniższej tabeli przedstawiono wyniki sondażu przeprowadzonego w grupie uczniów, dotyczącego czasu przeznaczanego dziennie na przygotowanie zadań domowych.

Czas (w godzinach)	1	2	3	4
Liczba uczniów	5	10	15	10

a) Naszkicuj diagram słupkowy ilustrujący wyniki tego sondażu.
b) Oblicz średnią liczbę godzin, jaką uczniowie przeznaczają dziennie na przygotowanie zadań domowych.
c) Oblicz wariancję i odchylenie standardowe czasu przeznaczonego dziennie na przygotowanie zadań domowych. Wynik podaj z dokładnością do 0,01.

17.13. Właściciel sklepu spożywczego w przypadku każdego nowego produktu przeprowadza test polegający na tym, że 50 losowo wybranych osób ocenia ten produkt w skali 0 do 5 punktów, w trzech kategoriach: **C** - ceny, **S** - smaku i **W** - wyglądu opakowania. Następnie właściciel oblicza średnią ważoną z następujących liczb: s_1 średniej liczby punktów w kategorii **C** (z wagą 5), s_2 średniej liczby punktów w kategorii **S** (z wagą 3), s_3 średniej liczby punktów w kategorii **W** (z wagą 2). W przypadku gdy tak obliczona średnia jest większa od 3 właściciel decyduje, że towar będzie sprzedawany w jego sklepie. Badania dotyczące nowego rodzaju kawy dały następujące rezultaty:
w kategorii **W**:



W kategorii **C** obliczona średnia była równa $s_1 = 2,42$, a w kategorii **S** $s_2 = 4,32$. Oblicz s_3 oraz oceń czy w rezultacie przeprowadzonego testu właściciel sklepu zdecyduje się na sprzedaż nowego gatunku kawy.

17.14. Podczas zawodów w łyżwiarstwie figurowym dziewięciu sędziów przyznawało noty za technikę i prezentację programu łyżwiarskiego. Punkty były przyznawane w skali $0,0$ do $6,0$. Nota za technikę jest średnią arytmetyczną uzyskanych punktów, podobnie nota za prezentację programu. Oblicz końcowe noty dwóch par, których punktacja została podana w tabeli, jeśli końcowa nota jest:
a) średnią arytmetyczną noty za technikę i prezentację,
b) średnią ważoną: nota za technikę ma wagę $0,6$, a nota za prezentację - wagę $0,4$.

Para I	**technika**	5,0	5,1	5,0	5,2	5,5	5,0	5,3	5,1	5,6
	prezentacja	4,9	5,0	4,8	5,2	5,4	4,9	5,0	4,8	5,0
Para II	**technika**	6,0	5,8	5,9	6,0	5,7	5,8	5,7	5,9	5,4
	prezentacja	5,5	5,8	5,5	5,9	5,6	5,8	5,9	5,4	5,9

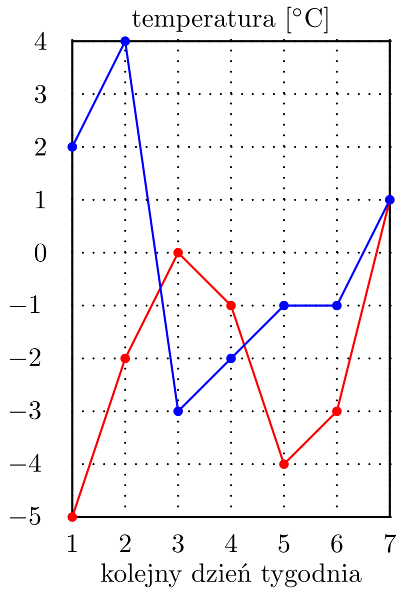
17.15. Nauczycielka matematyki w klasie Jacka oecnia w semestrze prace w następujących kategoriach: kartkówka (z wagą 20), praca domowa i odpowiedź ustna (z wagą 15), praca na lekcji (z wagą 10) oraz sprawdzian (z wagą 40). Na semestr proponuje ocenę x, jeśli średnia ważona ocen znajduje się w przedziale $\langle x - 0,25, x + 0,75)$, $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Czy Jacek ma szansę mieć na semestr ocenę dobrą, jeśli dotychczas uzyskał w wymienionych kategoriach odpowiednio oceny: $2, 3, 4, 4$, a może zdobyć jeszcze tylko jedną ocenę ze sprawdzianu? Na jaką ocenę musiałby zaliczyć ten sprawdzian?

17.16. **Test wyboru.** Zaznacz poprawne odpowiedzi.

a) Dany jest zestaw liczb: $1, 2, 10, 12, 15, 20$.
(A) Średnia tych liczb jest większa od mediany.
(B) Tylko dwie z tych liczb są mniejsze od średniej.
(C) Cztery z tych liczb są nie mniejsze od średniej.

b) W pewnej firmie zatrudniającej 10 osób miesięczne wynagrodzenia poszczególnych osób w 2002 roku wynosiły:
1400 zł, 1600 zł, 1600 zł, 1740 zł, 1790 zł, 1800 zł, 1820 zł, 2250 zł, 4300 zł, 6500 zł. Zatem w 2002 roku:
(A) średnia płaca w tej firmie to 2300 zł,
(B) połowa pracowników tej firmy zarabiała powyżej średniej,
(C) połowa pracowników tej firmy zarabiała nie więcej niż 1790 zł.

c) Rafał, każdego dnia o godzinie 12, w ciągu dwóch tygodni ferii, mierzył temperaturę powietrza. Wyniki pomiarów przedstawiono na wykresie (kolorem niebieskim zaznaczono wyniki z pierwszego tygodnia, a kolorem czerwonym - z drugiego).
(A) Średnia temperatura w pierwszym tygodniu była większa od średniej w drugim tygodniu.
(B) Odchylenie standardowe temperatur w pierwszym tygodniu było mniejsze niż w drugim.
(C) Średnia temperatura w ferie to 0°C.



d) W tabeli podano liczby z dwoma zestawami wag.

Liczba	10	15	20
Waga X	$0,5$	$0,4$	$0,1$
Waga Y	$0,3$	$1,2$	$1,5$

(A) Średnia ważona podanych liczb z wagami X jest równa 13.
(B) Średnia ważona podanych liczb z wagami Y jest mniejsza od ich średniej arytmetycznej.
(C) Średnia ważona podanych liczb z wagami X jest mniejsza od średniej ważonej z wagami Y.

17.17. (R) Tabela zawiera niektóre wyniki pisemnego sprawdzianu z matematyki w pewnej klasie maturalnej (ocenionego w sześciostopniowej skali ocen).

	Dziewczęta	**Chłopcy**
liczba osób	11	14
średnia ocen	$4,0$	$3,8$
odchylenie standardowe	$1,1$	$1,8$

Oblicz średnią ocen z tego sprawdzianu oraz odchylenie standardowe **dla całej klasy.** Wyniki podaj z zaokrągleniem do dwóch miejsc po przecinku.

18 Kombinatoryka

18.1. Dziesięć kaset wideo ustawiasz w kolejności na półce. Na ile sposobów możesz to zrobić, jeśli chcesz aby trzy kasety z filmami twojego ulubionego reżysera stały obok siebie?

18.2. Pięcioosobowa rodzina (rodzice, starsza córka i bliźniaki) ustawiają się do zdjęcia.
a) Ile jest możliwych ustawień dla osoby rozróżniającej bliźniaki?
b) Ile jest możliwych ustawień zdaniem fotografa, dla którego bliźniaki są identyczne?

18.3. Dany jest zbiór wszystkich cyfr.
a) Ile jest liczb trzycyfrowych?
b) Ile jest liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach?
c) Ile jest liczb trzycyfrowych, w których powtarza się co najmniej jedna cyfra?

18.4. **a)** Na pewnej uczelni obowiązuje skala ocen: $2, 3, 4, 5$. Egzamin nie jest zdany, gdy otrzymana z niego ocena jest równa 2. Czterech studentów tej uczelni stawiło się na egzamin. Na ile sposobów mogą im być wystawione noty, jeśli wiadomo, że wszyscy zdali egzamin?
b) Każdej z 10 osób przyporządkowujemy:
· dzień tygodnia, w którym się urodziła,
· miesiąc, w którym się urodziła.
Ile różnych wyników możemy otrzymać?
c) Alfabet Morse'a zbudowany jest z dwóch różnych elementów: kreski i kropki. Ile znaków pisarskich można utworzyć z tych elementów, jeśli każdy znak nie może posiadać mniej niż 3 i więcej niż 6 miejsc oznaczonych kropkami lub kreskami.

18.5. Przesądna studentka zawsze, kiedy tylko w dniu egzaminu dostawała z szatni numerek z choćy jedną cyfrą 2, prosiła o wymianę na inny bez dwójek. Jaki procent wszystkich 500 numerków w tej szatni stanowiły numerki „nieszczęśliwe" dla tej studentki?

18.6. Pan Kowalski założył w swojej firmie zamek z czterocyfrowym kodem. Aby mógł łatwiej zapamiętać, wybrał kod, w którym suma dwóch pierwszych cyfr równa jest 12, a suma dwóch ostatnich cyfr 10. Ile miał możliwości wyboru kodu?

18.7. **a)** Ile słów dziesięcioliterowych można utworzyć ze słowa ANALFABETA?
b) Na ile sposobów można ułożyć na półce 30 książek, spośród których 20 jest mniejszego formatu a 10 większego tak, aby mniejsze i większe książki nie były ze sobą pomieszane?
c) Do przedziału kolejowego drugiej klasy (dwa rzędy po 4 miejsca) wchodzi 8 osób. Na ile sposobów mogą one zająć miejsca tak, aby ustalone dwie osoby A oraz B siedziały:
· obok siebie,
· naprzeciwko siebie.

18.8. **Test wyboru.** Zaznacz poprawne odpowiedzi.

a) W kolejce do kasy biletowej ustawiły się cztery dziewczynki i pięciu chłopców. Liczba wszystkich możliwych ustawień osób w tej kolejce wynosi
(A) $4! + 5!$. **(B)** $9!$. **(C)** $4 \cdot 5$. **(D)** $4! \cdot 5!$.

b) Liczb naturalnych o różnych cyfrach większych od 30000 utworzonych z cyfr $1, 2, 3, 4, 5$ jest
(A) 120 **(B)** 48 **(C)** 72 **(D)** 240

c) 20 arbiturientów zdaje egzamin dojrzałości z matematyki. Żaden ze zdających nie otrzymał oceny niedostatecznej. Na ile sposobów zdający mogą mieć wystawione oceny, jeżeli obowiązuje następująca skala ocen: niedostateczny, dopuszczający, dostateczny, dobry, bardzo dobry, celujący?
(A) $5!$ **(B)** 20^5 **(C)** 5^{20} **(D)** $\binom{20}{5}$

d) W turnieju szachowym, w którym każdy szachista gra z każdym, rozegrano 190 spotkań. Ilu zawodników brało udział w turnieju?

(A) 95 **(B)** 20 **(C)** 80 **(D)** 45

e) Liczb pięciocyfrowych, w których zapisie pierwsza i ostatnia cyfra są takie same, jest:
(A) 10^4, **(B)** $9 \cdot 10^3$, **(C)** więcej niż wszystkich liczb czterocyfrowych.

18.9. (R) Dana jest liczba $a = \binom{15}{12}$.
a) Sprawdź, czy liczba a dzieli się przez 5.
b) Sprawdź, czy liczba 2 jest dzielnikiem liczby a.
c) Wyznacz liczbę wszystkich dzielników naturalnych liczby a.

18.10. (R) **a)** Oblicz n, gdy $\binom{n}{4} = 35$.

b) Różnica między $\binom{n}{2}$ a $\binom{n}{1}$ wynosi 5. Oblicz n.

c) Rozwiąż równanie: $20P_{n-2} = P_n$, gdzie P_n oznacza liczbę wszystkich permutacji zbioru n elementowego.

d) Rozwiąż równanie: $C_{x-4}^{x-5} = P_3$.

e) Rozwiąż równanie: $\binom{x}{2} - \binom{x}{3} = 0$, gdzie $x \in \{3, 4, ...\}$.

18.11. (R) Na jednej prostej dane są 4 różne punkty, na innej prostej równoległej do niej 6 różnych punktów. Ile istnieje
a) trójkątów,
b) czworokątów,
których wierzchołkami są dane punkty?

18.12. (R) **a)** Na okręgu zaznaczono sześć punktów. Ile różnych wielokątów o wierzchołkach w tych punktach można narysować?

b) Na ile sposobów można podzielić 10 książek między dwie osoby tak, aby każda z nich miała 5 książek?

c) Firma cateringowa dostarcza zestawy posiłków. Do wyboru jest 15 dań głównych, 10 napojów i 5 deserów. Planujesz wybrać 3 dania główne, 2 napoje i 2 desery. Na ile sposobów możesz to zrobić?

18.13. (R) Oznaczmy przez P_{13} liczbę wszystkich uporządkowań zbioru $\{1, 2, 3, ..., 13\}$. Sprawdź, czy P_{13} dzieli się przez:
a) 11
b) 17
c) 12!

18.14. (R) Oblicz:
a) $(\sqrt{2} + 1)^4$
b) $(1 - \sqrt{3})^5$
c) $(p + \sqrt{p})^3$
d) Wykonano potęgowanie dwumianu $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^9$ i uporządkowano jego składniki. Oblicz współczynnik stojący przy x^3.

19 Rachunek prawdopodobieństwa

19.1. Każdej karcie bankomatowej jest przypisany numer identyfikacyjny zwany kodem PIN. Kod ten składa się z czterech cyfr (cyfry mogą się powtarzać, ale kodem PIN nie może być 0000). Oblicz prawdopodobieństwo, że w losowo utworzonym kodzie PIN żadna cyfra się nie powtórzy. Wynik podaj w postaci ułamka nieskracalnego.

19.2. Nauczycielka wf sporządziła zestawienie dotyczące wzrostu (w zokrągleniu do 2 cm) i wagi (w zaokrągleniu do 2 kg) wszystkich dziewcząt klas pierwszych szkoły ponadgimnazjalnej.

168			1	2	3	2	
164			1	4	10	1	
162		1	3	15	6	1	
160	1	8	7	11	12		
158	1	2	6	4	8		
Wzrost [cm]	46	48	50	53	54	58	Waga [kg]

Określamy zdarzenia:
A - losowo spotkana uczennica klasy pierwszej będzie miała co najmniej 162 cm wzrostu,
B - losowo spotkana uczennica klasy pierwszej będzie ważyła co najwyżej 50 kg.
Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń: $A \cap B$, $A' \cap B$ i $A \cap B'$.

19.3. Krzyś rzuca dwa razy symetryczną kostką do gry i oblicza iloczyn wyrzuconych oczek. Jeśli iloczyn oczek należy do przedziału dokniętego $\langle 12, 16\rangle$, to Krzyś wygrywa. W pozostałych przypadkach przegrywa.
a) Uzupełnij tabelę tak, aby przedstawiała wszystkie możliwe wyniki.

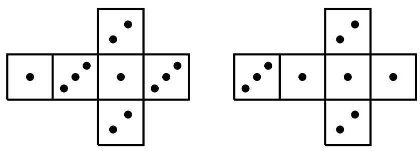
I \ II	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4		
2	2	4	6			
3	3	6				
4	4	8				
5						
6						

b) Podaj liczbę wyników sprzyjających wygranej Krzysia i oblicz prawdopodobieństwo wygranej.

19.4. Rzucamy dwa razy symetryczną, sześcienną kostką do gry i zapisujemy sumę liczb wyrzuconych oczek.
a) Uzupełnij tabelę, tak aby przedstawiała wszystkie możliwe wyniki tego doświadczenia.
b) Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A, polegającego na tym, że suma liczb oczek jest liczbą nieparzystą.
c) Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia B, polegającego na tym, że reszta z dzielenia sumy liczby oczek przez 3 jest równa 2.

I \ II	1	2	3	4	5	6
1	2					
2						
3		5				
4					9	
5						
6						

19.5. Mamy dwie jednorodne kostki sześcienne, których siatki przedstawione są na rysunku.
Rzucamy jednocześnie dwiema kostkami. Oblicz prawdopodobieństwo, że:
a) iloczyn oczek będzie równy 9,
b) na obu kostkach uzyskamy tę samą liczbę oczek,
c) suma oczek nie przekroczy liczby 3.



19.6. W pewnej grze rzuca się trzema kostkami i oblicza sumę oczek. Krupier twierdzi, ze nie ma znaczenia, czy postawimy na sumę oczek równą 10 czy 9, ponieważ każdą z nich można uzykać na 6 sposobów.
$9 = 1 + 2 + 6 = 1 + 3 + 5 = 1 + 4 + 4 = 2 + 2 + 5 = 2 + 3 + 4 = 3 + 3 + 3$,
$10 = 1 + 3 + 6 = 1 + 4 + 5 = 2 + 4 + 4 = 3 + 2 + 5 = 2 + 2 + 6 = 3 + 3 + 4$.
Czy krupier ma rację? Odpowiedź uzasadnij.

19.7. W pudełku są trzy kule białe i pięć kul czarnych. Do pudełka można albo dołożyć jedną kulę białą albo usunąć z niego jedną kulę czarną, a następnie wylosować z tego pudełka jedną kulę. W którym z tych przypadków wylosowanie kuli białej jest bardziej prawdopodobne? Wykonaj odpowiednie obliczenia.

19.8. Ze zbioru cyfr $\{1, 2, 3, 5, 7\}$ układamy wszystkie możliwe liczby 3-cyfrowe o różnych cyfrach. Z liczb tych wybieramy losowo jedną. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będzie ona wielokrotnością liczby 65?

19.9. **a)** Wszystkie ściany sześcianu o krawędzi równej 3 dm pomalowano, a następnie sześcian rozcięto na jednakowe sześciany o krawędzi 1 dm. Oblicz prawdopodobieństwo tego, ze losowo wybrany sześcian:
· będzie miał trzy pomalowane ściany,
· będzie miał tylko jedną pomalowaną ścianę,
· nie będzie miał żadnej pomalowanej ściany.
b) Zgodnie z najnowszymi badaniami 70% krasnoludków umie czytać, 40% krasnoludków umie pisać, natomiast 30% krasnoludków umie czytać i pisać.
· Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrany krasnoludek umie pisać ale nie umie czytać?
· Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrany krasnoludek, ani nie umie pisać, ani nie umie czytać.

19.10. Dany jest sześcian o wierzchołkach $ABCDA_1B_1C_1D_1$ i krawędzi długości 1. Wybieramy losowo dwa wierzchołki tego sześcianu. Wyznaczają one odcinek, którego są końcami. Niech A oznacza zdarzenie, że losowo wybrane wierzchołki wyznaczyły odcinek długości 1, natomiast B - zdarzenie, że losowo wybrane wierzchołki wyznaczyły odcinek długości $\sqrt{2}$. Oblicz i porównaj prawdopodobieństwo zdarzeń A i B.

19.11. Spośród liczb: $0, 1, 2, 3, 4, ..., 1000$ wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że liczba ta jest podzielna przez 4 lub 5.

19.12. Grupa szachistów zorganizowała rozgrywki, w których każdy zawodnik z każdym innym zawodnikiem miał rozegrać jedną partię. Postanowiono rozgrywać po 5 partii dziennie. Rozgrywki trwały 9 dni. Ilu szachistów uczestniczyło w tych rozgrywkach?

19.13. W loterii są 44 losy przegrywające, pozostałe losy wygrywają. Ile jest wszystkich losów, jeśli prawdopodobieństwo wyciągnięcia losu wygrywającego wynosi $\frac{1}{5}$?

19.14. Spośród liczb: $-9, -7, -5, -3, -1, 0, 2, 4, 6, 8$ losujemy dwie różne liczby a i b, a następnie zapisujemy ich iloczyn $a \cdot b$. Oblicz i porównaj prawdopodobieństwa zdarzeń A i B, jeśli: A oznacza zdarzenie, że iloczyn $a \cdot b$ jest liczbą nieujemną; B - zdarzenie, że iloczyn $a \cdot b$ jest liczbą niedodatnią.

19.15. Strzelając do tarczy pewien strzelec uzyskuje co najmniej 9 punktów z prawdopodobieństwem $0,5$, a co najwyżej 9 punktów z prawdopodobieństwem $0,7$. Oblicz prawdopodobieństwo, że ten strzelec uzyska dokładnie 9 punktów.

19.16. O zdarzeniach losowych A i B wiemy że: $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{3}$, $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$. Oblicz:
a) $P(A \cap B)$,
b) $P(A \setminus B)$.

19.17. Co czwarta kula znajdująca się w urnie to kula biała, pozostałe mają kolor czarny lub niebieski. Losujemy jedną kulę. Prawdopodobieństwo wylosowania z urny kuli niebieskiej lub białej jest dwukrotnie mniejsze niż prawdopodobieństwo wylosowania kuli niebieskiej lub czarnej. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej.

19.18. Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry i określamy zdarzenia: A - wyrzucono dwa razy tę samą liczbę oczek, B - suma wyrzuconych oczek jest większa od 7. Oblicz prawdopodobieństwo sumy tych zdarzeń.

19.19. Niech A, B będą zdarzeniami zawartymi w przestrzeni Ω. Wiedząc, że $P(A) = 0,62$, $P(B') = 0,8$ i $P(A \cup B) = 0,5$, oblicz $P(A \cap B)$ i $P(A \setminus B)$.

19.20. Trzy zdarzenia: A, B, C zawarte w przestrzeni Ω są parami rozłączne i $A \cup B \cup C = \Omega$.
Wiedząc, że $P(A) = 2P(B) = 3P(C)$, oblicz $P(A)$.

19.21. W sklepie z zabawkami stoi pudło z trzydziestoma maskotkami: misiami i pieskami. Niektóre z nich zostały wyprodukowane w Chinach. Losowo wybieramy jedną maskotkę. Prawdopodobieństwa wylosowania:
- maskotki chińskiej jest równe $0,7$;
- misia jest równe $0,8$;
- maskotki chińskiej lub misia jest równe $0,9$.
Ile jest w pudle misiów produkcji chińskiej, a ile piesków produkcji chińskiej?

19.22. W urnie znajdują się kule z kolejnymi liczbami $10, 11, 12, 13, ..., 50$, przy czym kul z liczbą 10 jest 10, kul z liczbą 11 jest 11 itd., a kul z liczbą 50 jest 50. Z urny tej losujemy jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosujemy kulę z liczbą parzystą.

19.23. **Test wyboru.** Zaznacz poprawne odpowiedzi.

a) Wiadomo, że $A, B \subset \Omega$ i $P(A) = 0$, $P(B) = 1$, to
(A) Zdarzenie B jest niemożliwe **(B)** $A \cap B = \emptyset$ **(C)** Zdarzenie A jest pewne **(D)** $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$

b) W worku znajdują się kule białe i niebieskie w stosunku $4 : 3$. Losujesz na chybił trafił kulę. Jaką masz szansę wylosowania kuli niebieskiej?
(A) $\frac{9}{21}$ **(B)** $\frac{3}{4}$ **(C)** $\frac{3}{7}$ **(D)** $\frac{4}{12}$

c) W pudełku jest 10 lizaków: 6 malinowych i 4 truskawkowe. Dziecko wyjmuje 4 lizaki. Prawdopodobieństwo tego, że wśród nich:
(A) nie ma lizaków truskawkowych, jest równe $\frac{1}{14}$
(B) są tylko lizaki truskawkowe, jest równe $\frac{13}{14}$
(C) są 3 lizaki malinowe i 1 truskawkowy, jest równe $\dfrac{\binom{6}{3} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{10}{4}}$

d) W urnie są kule o numerach $1, 2, 3, 4, 5$. Losujemy bez zwracania trzy kule. Numery wylosowanych kul zapisane w kolejności losowania tworzą liczbę trzycyfrową. Prawdopodobieństwo tego, że jest to liczba podzielna przez:
(A) 2 jest równe $\frac{2}{5}$ **(B)** 4 jest równe $\frac{1}{5}$ **(C)** 5 jest równe $\frac{1}{5}$

e) W celu przetestowania działania leku poddano badaniu dwie grupy pacjentów chorujących na pewną chorobę. W I grupie podawano lek, a w II zamiast leku podawano środek neutralny. W tabeli podano otrzymane wyniki.

	Liczba pacjentów	
Grupa	Poprawa	Brak poprawy
I	16	4
II	1	9

Prawdopodobieństwo tego, że u losowo wybranego pacjenta:
(A) z I grupy nastąpiła poprawa, jest równe $0,8$
(B) z II grupy nastąpiła poprawa, jest równe $0,1$
(C) nastąpiła poprawa, jest równe $0,9$

f) Niech $A, B \subset \Omega$. Mamy dane $P(A) = 0,6$, $P(B') = 0,3$ i $P(A \cap B) = 0,4$. Wówczas:
(A) $P(B \setminus A) = 0,1$
(B) $P(A \cup B) = 0,9$
(C) $P(A \cap B') = 0,2$

19.24. (R) W wycieczce szkolnej bierze udział 16 uczniów, wśród których tylko czworo zna okolicę. Wychowawca chce wybrać w sposób losowy 3 osoby, które mają pójść do sklepu. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wśród wybranych trzech osób będą dokładnie dwie znające okolicę.

19.25. (R) Z szuflady, w której znajdują się dwa batony Marsowe, trzy batony Słoneczne i pięć batonów Nieziemskich, mama na chybił trafił wyciąga trzy razy po jednym batonie i obdziela nimi po kolei Basię, Krzysia i Zosię. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że każde dziecko otrzyma baton innego rodzaju?

19.26. (R) Na stole leżało 14 banknotów: 2 banknoty o nominale 100 zł, 2 banknoty o nominale 50 zł i 10 banknotów o nominale 20 zł. Wiatr zdmuchnął na podłogę 5 banknotów. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że na podłodze leży dokładnie 130 zł. Odpowiedź podaj w postaci ułamka nieskracalnego.

19.27. (R) **a)** Drużyna siatkówki składa się z sześciu zawodników. Do kontroli antydopingowej wybiera się dwóch

zawodników. Jakie jest prawdopodobieństwo, że kontroli poddany zostanie kapitan drużyny?

b) Wśród 12 żarówek 4 są wadliwe. Wybrano losowo 3 żarówki. Jakie jest prawdopodobieństwo tego,

że co najmniej jedna z nich jest dobra?

c) Z 5 prętów, których długości są odpowiednio równe $1, 2, 3, 4, 5$ jednostek długości, wybieramy losowo

trzy. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że można z nich zbudować trójkąt prostokątny.

19.28. (R) Ze zbioru $X = \{x : x \in \mathbb{C} \wedge |x + 4| \leqslant 2\}$ losujemy dwa razy (bez zwracania) po jednej liczbie. Oznaczamy te liczby w kolejności losowania, a oraz b. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A - para liczb (a, b) jest rozwiązaniem nierówności $x - y - 2 < 0$.

19.29. (R) Na dwóch prostych równoległych obrano 9 punktów: na jednej z nich 4 punkty a na drugiej 5 punktów. Ze zbioru tych punktów losujemy jednocześnie trzy punkty. Oblicz prawdopodobieństwo, że są one wierzchołkami pewnego trójkąta.

19.30. (R) Z szuflady, w której znajduje się 10 różnych par rękawiczek wybieramy losowo cztery rękawiczki. Opisz zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych, a następnie oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:
A - wśród wylosowanych rękawiczek nie będzie pary,
B - wśród wylosowanych rękawiczek będzie dokładnie jedna para.

19.31. (R) Dany jest zbiór $X = \{1, 2, 3, ..., n\}$, $n \geqslant 3$, $n \in \mathbb{N}$. Ze zboru X losujemy kolejno bez zwracania dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo, że pierwsza z wylosowanych liczb jest większa od drugiej.

19.32. (R) Wielokąt wypukły ma n wierzchołków ($n \geqslant 3$ i $n \in \mathbb{N}_+$), wśród których losujemy jednocześnie dwa. Wyznacz n wiedząc, że prawdopodobieństwo wylosowania wierzchołków wyznaczających przekątną tego wielokąta jest mniejsze od $\frac{4}{5}$.

19.33. (R) Wzór funkcji $f(x) = \frac{a}{x-b} + c$ tworzymy w następujący sposób.
Ze zbioru $Z = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ losujemy kolejno trzy liczby (bez zwracania); pierwsza z wylosowanych liczb jest równa współczynnikowi a, druga - współczynnikowi b, trzecia - współczynnikowi c. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:
A - funkcja f jest funkcją malejącą w każdym ze zbiorów $(-\infty, 2)$ oraz $(2, +\infty)$;
B - miejscem zerowym funkcji f jest liczba 0.

19.34. (R) Do szkolnych zawodów szachowych zgłosiło się 16 uczniów, wśród których było dwóch faworytów. Organizatorzy zawodów zamierzają losowo podzielić szachistów na dwie jednakowo liczne grupy eliminacyjne, Niebieską i Żółtą. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że faworyci tych zawodów nie znajdą się w tej samej grupie eliminacyjnej. Końcowy wynik obliczeń zapisz w postaci ułamka nieskracalnego.

19.35. (R) Uczniowie dojeżdżający do szkoły zaobserwowali, że spóźnienie autobusu zależy od tego, który z trzech kierowców prowadzi autobus. Przeprowadzili badania statystyczne i obliczyli, że w przypadku, gdy autobus prowadzi kierowca A, spóźnienie zdarza się w 5% jego kursów, gdy prowadzi kierowca B w 20% jego kursów, a gdy prowadzi kierowca C w 50% jego kursów. W ciągu 5-dniowego tygodnia nauki dwa razy prowadzi autobus kierowca A, dwa razy kierowca B i jeden raz kierowca C. Oblicz prawdopodobieństwo spóźnienia się szkolnego autobusu w losowo wybrany dzień nauki.

19.36. (R) Pewne przedsiębiorstwo ma trzy miejskie numery telefoniczne. Prawdopodobieństwo, iż w danej chwili korzysta się z danego numeru telefonu wynosi $\frac{3}{5}$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:
a) co najmniej jeden numer jest wolny,
b) dokładnie dwa numery są wolne.

19.37. (R) **a)** Dwaj strzelcy równocześnie strzelają jeden raz do tarczy. Jeden z nich trafia zwykle do celu 7 razy

na 10 strzałów, a drugi trafia 8 razy na 10 strzałów. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że

przynajmniej jeden z nich trafi do celu?

b) Strzelec trafia do tarczy z prawdopodobieństwem $0,9$. Na każde 10 strzałów trafiających w tarczę dwa trafiają w dziesiątkę. Oblicz prawdopodobieństwo, że strzelając jeden raz strzelec trafi w „dziesiątkę”.

19.38. (R) Tabela przedstawia liczbę uczniów wszystkich klas III pewnego liceum.

Klasa	Liczba wszystkich uczniów	Liczba chłopców
III a	30	10
III b	32	24
III c	25	15
III d	27	18

Spośród wszystkich klas trzecich wybieramy losowo jedną klasę, a następnie z tej klasy jednego ucznia. Oblicz prawdopodobieństwo, że wybranym uczniem będzie dziewczyna.

19.39. (R) W urnie znajduje się n kul czarnych i $2n$ kul białych ($n \geqslant 2$ i $n \in \mathbb{N}$). Losujemy jednocześnie dwie kule. Dla jakich n prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul tego samego koloru jest większe od prawdopodobieństwa wylosowania dwóch kul różnych kolorów?

19.40. (R) Losujemy jedną liczbę spośród liczb: $1, 2, 3, ..., 1000$. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 4 lub przez 9.

19.41. (R) Wiadomo, że $P(A \cap B') = P(B \cap A')$, $P(A \cup B) = 0,75$, $P(A \cap B) = 0,25$. Oblicz: $P(B)$, $P(A \setminus B)$.

19.42. (R) Dane są dwa takie zdarzenia $A, B \subset \Omega$, że $P(B) \leqslant \frac{1}{3}$ i $P(A \cap B) \geqslant \frac{1}{10}$. Czy może zachodzić równość $P(B \setminus A) = \frac{4}{15}$? Odpowiedź uzasadnij.

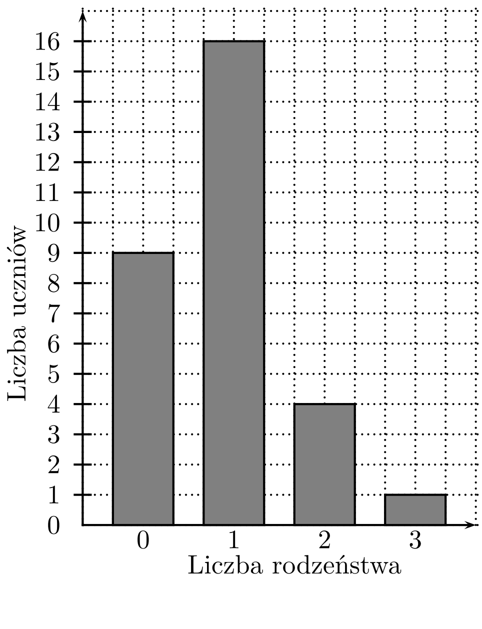
19.43. (R) Wykaż, że jeśli A, B są dowolnymi zdarzeniami przestrzeni Ω, to $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

19.44. (R) Ze zbioru liczb $\{1, 2, ..., 2n + 5\}$ wybieramy jednocześnie dwie liczby. Na ile sposobów możemy to zrobić, tak aby otrzymać dwie liczby takie, że:
a) ich różnica będzie liczbą parzystą,
b) suma ich kwadratów będzie liczbą podzielną przez cztery?

19.45. (R) Rzucamy trzykrotnie symetryczną kostką sześcienną do gry. Oblicz prawdopodobieństwa następujących zdarzeń:
A - na każdej kostce wypadnie nieparzysta liczba oczek
B - suma kwadratów liczb wyrzuconych oczek będzie podzielna przez 3.

19.46. (R) Niech $A, B \subset \Omega$ będą zdarzeniami losowymi, takimi że $P(A) = \frac{5}{12}$ oraz $P(B) = \frac{7}{11}$. Zbadaj, czy zdarzenia A i B są rozłączne.

19.47. (R) W pewnym liceum, wśród uczniów 30-osobowej klasy (każdy uczeń pochodzi z innej rodziny), zebrano dane na temat posiadanego rodzeństwa. Wyniki badań przedstawiono na diagramie.
a) Wychowawczyni wybrała losowo 3 osoby z tej klasy. Oblicz prawdopodobieństwo, że jedna z nich ma dwoje rodzeństwa, a dwie pozostałe są jedynakami. Wynik zaokrąglij do dwóch miejsc po przecinku.
b) Oblicz średnią, odchylenie standardowe i medianę liczby dzieci w jednej badanej rodzinie.



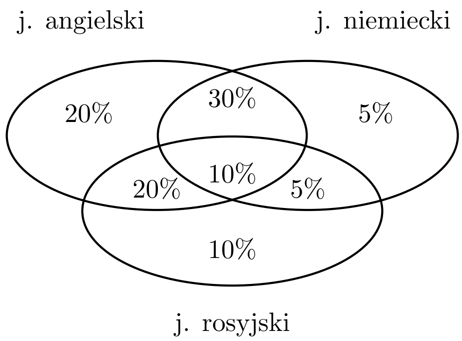
19.48. (RR) Wśród 300 zdających egzamin na informatykę było 200 absolwentów, którzy zdali matematykę na maturze na poziomie rozszerzonym, 75 na poziomie podstawowym i 25, którzy nie zdawali matematyki na maturze. Prawdopodobieństwo zdania egzaminu przez absolwenta jest następujące: dla tego, który zdał maturę na poziomie rozszerzonym równa się $0,9$, na poziomie podstawowym $0,25$, a dla tego, który nie zdawał matematyki na maturze równa się $0,1$.
a) Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrany kandydat wśród 300 zdających, zdał pomyślnie egzamin.
b) Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrany kandydat zdał maturę z matematyki na poziomie rozszerzonym, jeśli wiadomo, że zdał on egzamin wstępny.

19.49. (RR) W szpitalu na oddziale wewnętrznym przebywa rocznie średnio 2000 chorych. Wśród leczonych było 800 cierpiących na chorobę K_1, 600 na chorobę K_2, 400 na chorobę K_3 i 200 na chorobę K_4. Prawdopodobieństwo pełnego wyleczenia z chorób wynosi $0,9$, $0,8$, $0,7$ i $0,5$. Oblicz prawdopodobieństwo, że:
a) losowo wybrany pacjent jest całkowicie wyleczony,
b) wypisany pacjent jest całkowicie wyleczony. Jakie jest prawdopodobieństwo, ze cierpiał na chorobę K_2?

19.50. (RR) Niech A, B będą zdarzeniami o prawdopodobieństwach $P(A)$ i $P(B)$. Wykaż, że jeżeli $P(A) = 0,85$ i $P(B) = 0,75$, to prawdopodobieństwo warunkowe spełnia nierówność $P(A|B) \geqslant 0,8$.

19.51. (RR) W urnie jest 6 kul, w tym 5 białych i jedna czarna. Adam i Jarek losują bez zwracania po jednej kuli. Przegrywa ten, kto pierwszy wyciągnie kulę czarną. Czy prawdopodobieństwo przegranej jest większe dla tego chłopca który rozpoczyna losowanie? Narysuj drzewo dotyczące tego modelu probabilistycznego i uzasadnij swoją odpowiedź.

19.52. (RR) Wśród 100 losowo wybranych uczniów przeprowadzono ankietę. Zadano pytanie „ których języków spośród angielskiego, niemieckiego, rosyjskiego uczyłeś się co najmniej przez 2 lata? Procentowe wyniki ankiety przedstawiono na diagramie. Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że osoba wybrana losowo spośród osób ankietowanych uczyła się języka angielskiego, N - uczyła się języka niemieckiego i R - języka rosyjskiego. Czy niezależne są zdarzenia:
a) A i N,
b) A i R.



19.53. (RR) Ze zbioru liczb $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ losujemy kolejno dwie liczby bez zwracania. Sprawdź niezależność zdarzeń:
A - suma wylosowanych liczb jest większa od 8,
B - za pierwszym razem wylosujemy liczbę nieparzystą.

19.54. (RR) Dane są prawdopodobieństwa warunkowe P: $P(A|B) = \frac{2}{5}$, $P(A|B') = \frac{1}{2}$ oraz $P(B) = \frac{1}{3}$. Oblicz $P(A)$ i $P(A \cap B)$.

19.55. (RR) Pewna firma ma cztery różne numery telefonów. Prawdopodobieństwo tego, że pojedynczy numer będzie w danej chwili zajęty jest równe $\frac{2}{3}$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:
a) co najmniej jeden numer będzie wolny,
b) dokładnie trzy numery będą wolne.

19.56. (RR) Karol gra w szachy z siostrą. Oboje są równorzędnymi partnerami. Czy bardziej prawdopodobne jest, że Karol wygra pięć z siedmiu rozegranych partii, czy sześć partii z ośmiu?

19.57. (RR) Prawdopodobieństwo trafienia do tarczy w pojedynczym strzale przez pewnego biatlonistę wynosi $0,8$. Biatlonista oddaje serię 5 strzałów. Oblicz prawdopodobieństwo, że:
a) tarcza zostanie trafiona dokładnie cztery razy,
b) tarcza zostanie trafiona co najmniej jeden raz.

19.58. (RR) Prawdopodobieństwo, że w danym dniu „świeci słońce” w miejscowości M wynosi $\frac{5}{6}$. Przyjeżdżamy na 14 dniowy urlop do M. Jakie jest prawdopodobieństwo, że „słońce będziemy mieli” dokładnie przez 10 dni.

19.59. (RR) Krótki łańcuch choinkowy składa się z dwudziestu żarówek. Dla każdej z żarówek prawdopodobieństwo, że będzie działać przez co najmniej 300 godzin jest równe $0,9$.
a) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w krótkim łańcuchu w ciągu 300 godzin przepali się co najwyżej jedna żarówka. W obliczeniach możesz przyjąć, że $(0,9)^{19} \approx 0,14$.
b) W skrzyni jest 6 łańcuchów krótkich i 4 łańcuchy długie. Do dekoracji choinki użyto cztery losowo wybrane łańcuchy. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że do dekoracji użyto dwóch łańcuchów krótkich i dwóch łańcuchów długich.

20 Rachunek pochodnych

20.1. (RR) Oblicz granicę funkcji:
a) $f(x) = \frac{x^3-3x-2}{3x^2-4x-4}$ w punkcie $x_0 = 2$,
b) $f(x) = \frac{3x^2-5x-2}{x^2-4}$ w punktach $x_0 = 2$, $x_0 = -2$ oraz przy $x \to \infty$,
c) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{6-2x}$ w punkcie $x_0 = 3$,
d) $f(x) = \sqrt{x^2+2x} - x$ przy $x \to \infty$,
e) $f(x) = \frac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$ w punkcie $x_0 = 1$,
f) $f(x) = \frac{64-x^3}{x-4}$ w punkcie $x_0 = 4$,
g) $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ przy $x \to -\infty$,
h) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$ przy $x \to \infty$,
i) $f(x) = \frac{sin3x}{4x}$ w punkcie $x_0 = 0$.

20.2. (RR) Wyznacz równania asymptot funkcji:
a) $f(x) = \frac{3x-6}{2x+2}$
b) $f(x) = \frac{x^2+4x+4}{1-x}$

20.3. (RR) Dana jest funkcja $f(x) = x^4$.
a) Oblicz wartość wyrażenia $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ dla $h = 0,1$.
b) Do jakiej liczby dąży wartość wyrażenia $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$, gdy wartość h dąży do zera?

20.4. (RR) Oblicz granicę funkcji

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}.$$

20.5. (RR) **a)** Dla jakiej wartości parametru k zachodzi równość:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-(k+1)x+k}{x^2-1} = 5.$$

b) W zależności od parametru $k \in \mathbb{R}$ oblicz granicę funkcji

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{kx+1}}{x}.$$

20.6. (RR) Naszkicuj wykres pewnej funkcji f, która spełnia następujące warunki:
a) dziedziną jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$,
b) jest ciągła w swojej dziedzinie,
c)

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = -4$$

$$\lim_{x\to -3} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$$

20.7. (RR) **a)** Zbadaj ciągłość funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-2x^2+3x+2}{x-2}, & x \neq 2 \\ -5, & x = 2 \end{cases}$$

b) Wykonaj wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leqslant 0 \\ m - x, & x > 0 \end{cases}$ dla tej wartości parametru m, dla której funkcja f jest ciągła.

c) Niech

$$f(x) = \begin{cases} x - 3, & x \geqslant 2 \\ mx + 1, & x < 2 \end{cases}$$

Wyznacz wartość parametru m tak, aby funkcja była ciągła. Dla wyznaczonej wartości parametru m:

· sporządź wykres funkcji,

· zapisz wzór funkcji z użyciem wartości bezwzględnej.

20.8. (RR) Trzy walce, każdy o wysokości 5 m o promieniach podstaw odpowiednio równych: 3 m, 2 m, 1 m, postawiono jeden na drugim.
a) Wyraź pole przekroju bryły utworzonej przez te walce, płaszczyzną równoległą do podstaw walców jako funkcję odległości tego przekroju od płaszczyzny dolnej podstawy największego walca.
b) Czy ta funkcja jest ciągła?
c) Sporządź jej wykres.

20.9. (RR) Wyznacz pochodną funkcji:
a) $f(x) = -3x^2 + x$ dla $x_0 = 0$,
b) $f(x) = (x-2)^2(1-x^2)$,
c) $f(x) = \frac{2x^2-x+1}{3x-x^2}$,
d) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x}$,
e) $f(x) = cos^2x$,
f) $f(x) = \frac{sinx}{x^2}$,
g) $f(x) = \sqrt{7x^2 + x}$,
h) $f(x) = tg(1-x^2)$.

20.10. (RR) **a)** Dana jest funkcja określona wzorem $f(x) = 3x^2 - x + 4$ oraz punkt $M = (1, y_0)$ należący do wykresu tej funkcji. Wyznacz współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji w punkcie M. Wyznacz równanie tej stycznej.

b) Wyznacz współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \frac{3x^2-1}{1-x^2}$ w $x_0 = 2$.

c) Wyznacz kąt, który styczna do wykresu funkcji w punkcie o odciętej $x_0 = \frac{1}{2}$ tworzy z dodatnią półosią osi OX, gdy $f(x) = 2\sqrt{3}x^4$.

d) Napisz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = 8x - x^4$ w punktach jej przecięcia z osią OX.

e) Dla jakiej wartości parametru m prosta $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}$ jest styczna do wykresu funkcji $f(x) = x^4 + m$.

20.11. (RR) Na wykresie funkcji $f(x) = x^2 - x + 3$ wyznacz taki punkt P, w którym styczna do tego wykresu jest równoległa do prostej o równaniu $y = 7x - 2$.

20.12. (RR) Dana jest funkcja $f(x) = \frac{ax+b}{x-2}$, o której wiadomo, że $f(3) = 5$ i $f'(1) = -3$.
a) Wyznacz wzór tej funkcji i określ jej dziedznę.
b) Wyznacz miejsca zerowe.

20.13. (RR) **a)** Uzasadnij dlaczego funkcja $f(x) = 3x + 2sinx$ nie posiada ekstremum.

b) Dla jakiej wartości parametru m liczba $x_0 = 1$ jest miejscem zerowym pochodnej funkcji $f(x) = x^3 - 2mx^2 + 2$.

c) Zbadaj monotoniczność funkcji $f(x) = 5x + cos4x$.

20.14. (RR) Wyznacz parametry a, b wiedząc, że funkcja $y = x^3 + ax + b$ w punkcie $x = 3$ osiąga ekstremum równe 1.

20.15. (RR) Wyznacz zbiór wartości funkcji o wzorze $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ określonej na przedziale $\langle 2, 3\rangle$.

20.16. (RR) Dla jakich wartości parametru m funkcja określona wzorem $f(x) = \frac{1}{3}mx^3 - 2x^2 + (m-3)x + 1$ jest funkcją rosnącą w $\mathbb{R}$.

20.17. (RR) Funkcja f dana jest wzorem $f(x) = x^3 - 6x^2 + c$ dla $x \in \mathbb{R}$ i $c \in \mathbb{R}$.
a) Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji f w przedziale $\langle -1, 3\rangle$ wiedząc, że $f(0) = 8$.
b) Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f.

20.18. (RR) Dana jest funkcja $f(x) = x^3 - px^2 + 5x - 2$.
a) Znajdź taką wartość parametru p, dla której funkcja f osiąga minimum w punkcie $x = 5$.
b) Dla wyznaczonego p podaj przedziały monotoniczności funkcji f.

20.19. (RR) Funkcja $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x - 2$ przyjmuje dla argumentu p wartość 8, a jej pochodna ma dla argumentu p wartość 0.
a) Oblicz p.
b) Wyznacz ekstrema funkcji f.
c) Podaj przedziały mnonotoniczności funkcji f.

20.20. (RR) Zbadaj monotoniczność i ekstrema funkcji $f(x) = 6x^2 - x^3$.

20.21. (RR) Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$.

20.22. (RR) Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji określonej wzorem $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$.

20.23. (RR) Funkcja f zmiennej rzeczywistej x jest określona wzorem $f(x) = x^2 - mx$.
a) Dla jakich wartości m, funkcja f jest malejąca w przedziale $(-1, 1)$?
b) Dla $m = 3$ wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji f w przedziale $\langle 1, 4\rangle$.

20.24. (RR) Dla jakiej wartości parametru k funkcja $f(x) = x^3 - 4x^2 + kx$ osiąga ekstremum w punkcie $x_0 = 1$? Wyznacz drugie ekstremum i określ rodzaj każdego z nich.

20.25. (RR) Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji:
a) $f(x) = x^4 + x^3 - 8x^2 - 12x + 1$ w $\langle 0, 3\rangle$,
b) $f(x) = \frac{x^2-4x+8}{2(x-2)}$ w $\langle -3, 1\rangle$.

20.26. (RR) Okno ma kształt prostokąta zakończonego na górze półkolem. Jaka powinna być podstawa prostokąta, żeby przy obwodzie okna wynoszącym 2 m powierzchnia okna była największa?

20.27. (RR) Jaki prostokąt o obwodzie 36 cm ma najkrótszą przekątną?

20.28. (RR) Suma długości wszystkich krawędzi graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa 12. Jaka powinna być długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa, aby jego objętość była maksymalna?

20.29. (RR) Przez punkt $P = (-1, 4)$ prowadzimy proste przecinające układ współrzędnych w punktach $A = (x, 0)$, $B = (0, y)$, przy czym $x < 0$ i $y > 0$. Wyznacz równanie tej z nich, dla której suma odległości punktów A i B od początku układu współrzędnych jest najmniejsza.

20.30. (RR) Funkcja f dana jest wzorem $f(x) = x^3 - 6x^2 + c$ dla $x \in \mathbb{R}$ i $c \in \mathbb{R}$.
a) Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji f w przedziale $\langle -1, 3\rangle$, wiedząc, że $f(0) = 8$.
b) Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f.

20.31. (RR) Funkcja f ma następujące własności:
- jej dziedziną jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych,
- f jest funkcją nieparzystą,
- f jest funkcją ciągłą oraz:
$f'(x) < 0$ dla $x \in (-8, -3)$,
$f'(x) > 0$ dla $x \in (-3, -1)$,
$f'(x) < 0$ dla $x \in (-1, 0)$,
$f'(-3) = f'(-1) = 0$,

$f(-8) = 0$,
$f(-3) = -2$,
$f(-2) = 0$,
$f(-1) = 1$.
W prostokątnym układzie współrzędnych na płaszczyźnie naszkicuj wykres funkcji f w przedziale $\langle -8, 8 \rangle$, wykorzystując podane powyżej informacje o jej własnościach.