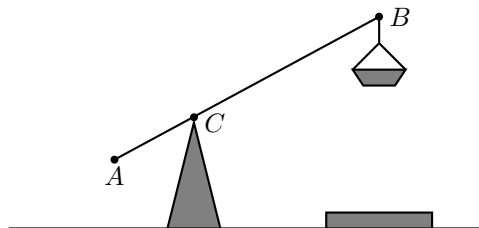


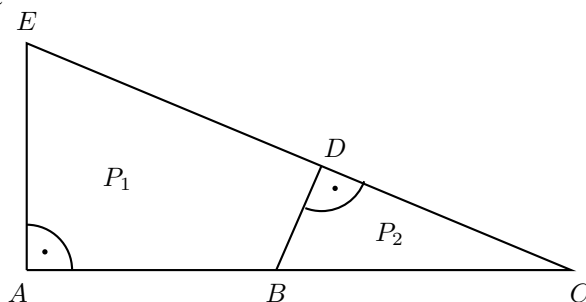
1. W trójkącie równoramiennym ABC , w którym $|AC| = |BC| = 10$ cm, wysokość poprowadzona z wierzchołka C jest równa 5 cm. Oblicz miary kątów tego trójkąta. Odpowiedź podaj w stopniach.
2. W pewnym skansenie jest żuraw studzienny. Jego dźwignię AB podparto w punkcie C tak, że ramiona dźwigni mają długości: $|AC| = 2,4$ m i $|CB| = 7,2$ m. Koniec dźwigni początkowo znajdował się 0,5 m poniżej poziomu punktu podparcia C , a następnie obrócono dźwignię tak, że koniec A znalazł się 0,5 m powyżej poziomu punktu C . O ile metrów opuści się w tym czasie koniec B dźwigni?



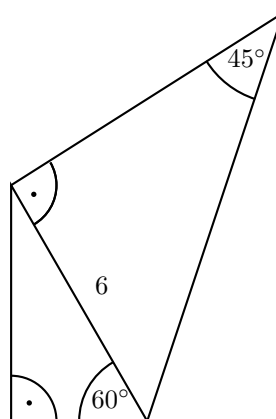
3. Na pewne wzgórze można wejść pokonując 50 schodów. Każdy schodek ma wysokość 30 cm, a jego powierzchnia użytkowa ma szerokość 40 cm. Oblicz w metrach wysokość h wzgórza i długość d poręczy wzdłuż linii schodów.
4. Dany jest prostokąt o bokach a i b . Zmniejszamy długość boku a o 10% oraz zwiększamy długość boku b o 20%.
 - a) O ile procent zwiększy się pole tego prostokąta?
 - b) Wyznacz długość boku b , dla której nowy prostokąt będzie miał taki sam obwód jak prostokąt wyjściowy, jeśli wiadomo, że bok a ma długość 30 cm.
5. Dany jest trójkąt prostokątny ABC o przeciwprostokątnej AB , taki że $\sin|\angle BAC| = 0,3$ i $|AC| = 7$. Oblicz pole koła opisanego na tym trójkącie.
6. W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna ma długość 12, a cosinus jednego z kątów ostrych wynosi $\frac{2}{3}$. Oblicz wysokość opuszczoną na przeciwprostokątną.

7. Państwo Nowakowie przeznaczili 26000 zł na zakup działki. Do jednej z ofert dołączono rysunek dwóch przylegających do siebie działek w skali 1 : 1000. Jeden metr kwadratowy gruntu w tej ofercie kosztuje 35 zł. Oblicz, czy przeznaczona przez państwa Nowaków kwota wystarczy na zakup działki P_2 .

$$\begin{aligned} |AE| &= 5 \text{ cm}, \\ |EC| &= 13 \text{ cm}, \\ |BC| &= 6,5 \text{ cm}. \end{aligned}$$

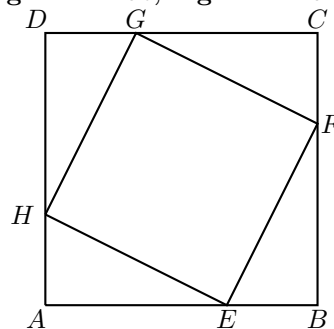


8. Przekątna czworokąta dzieli go na dwa trójkąty prostokątne.
 - a) Oblicz obwód tego czworokąta.
 - b) Jaką część pola czworokąta stanowi pole mniejszego trójkąta? Wynik podaj w zaokrągleniu do 0,1.



9. Oblicz pole czworokąta wypukłego $ABCD$, w którym kąty wewnętrzne mają odpowiednio miary: $|\angle A| = 90^\circ$, $|\angle B| = 75^\circ$, $|\angle C| = 60^\circ$, $|\angle D| = 135^\circ$, a boki AB i AD mają długość 3 cm. Sporządź rysunek pomocniczy.

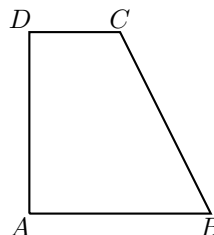
10. W kwadrat $ABCD$ wpisano kwadrat $EFGH$, jak pokazano na poniższym rysunku. Wiedząc, że $|AB| = 1$ oraz tangens kąta AEH równa się $\frac{2}{5}$, oblicz pole kwadratu $EFGH$.



11. Dany jest kwadrat o boku długości a . W prostokącie $ABCD$ bok AB jest dwa razy dłuższy niż bok kwadratu, a bok AD jest o 2 cm krótszy od boku kwadratu. Pole tego prostokąta jest o 12 cm^2 większe od pola kwadratu. Oblicz długość boku kwadratu.

12. Oblicz obwód rombu, którego pole jest równe 384, a stosunek długości przekątnych wynosi 3 : 4.

13. Długość ramienia BC trapezu prostokątnego jest dwa razy większa od różnicy długości jego podstaw. Kąt ABC ma miarę:
- (A) 30° .
 (B) 45° .
 (C) 60° .
 (D) 75° .



14. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD . Przekątne tego trapezu przecinają się w punkcie S . Wykaż, że $|SA| \cdot |SD| = |SB| \cdot |SC|$.

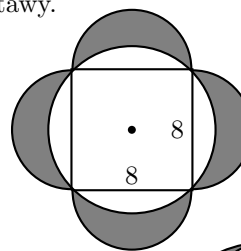
15. Obwód trapezu równoramiennego jest równy 44 cm, a długość dłuższej podstawy jest równa 20 cm. Oblicz pole tego trapezu, jeżeli wiadomo, że przekątna dzieli kąt ostry trapezu na połowy.

16. W trapezie prostokątnym dłuższa przekątna ma długość 12 cm i tworzy z dłuższym ramieniem kąt o mierze 30° , natomiast z krótszym ramieniem kąt o mierze 60° . Oblicz pole tego trapezu.

17. Dany jest trapez równoramienny, którego ramię ma długość 6 i jest nachylone do dłuższej podstawy pod kątem 60° . Podstawa ta ma długość 10.

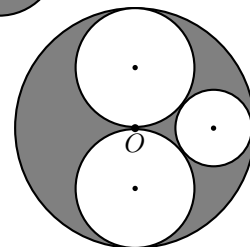
- a) Oblicz obwód i pole trapezu.
 b) Oblicz długość przekątnej trapezu.
 c) Oblicz odległość punktu przecięcia się przekątnych od dłuższej podstawy.

18. Oblicz obwód i pole zacieniowanego obszaru.

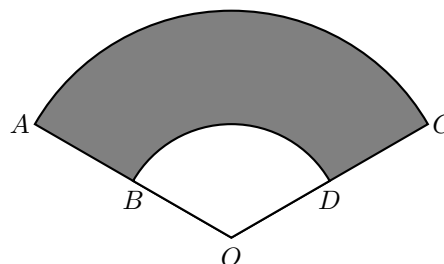


19. Dane są cztery okręgi parami styczne. Promień największego okręgu o środku O jest równy 2.

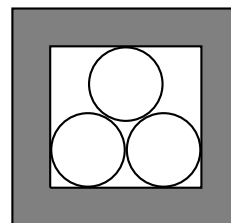
- a) Oblicz długość promienia najmniejszego okręgu.
 b) Oblicz pole zacieniowanego obszaru.



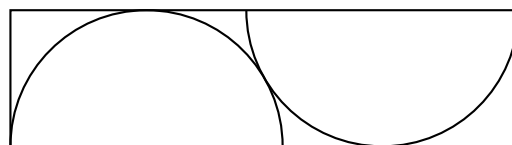
20. Rysunek przedstawia kształt obszaru zakreślonego przez wycieraczkę szyby samochodu. Kąt AOC ma miarę $2,5$ radiana oraz $|OB| = 20 \text{ cm}$, a ramię BA wycieraczki ma długość 30 cm. Oblicz pole obszaru, który wyczyści wycieraczka.



21. Na trzech okręgach parami stycznych zewnętrznie, o promieniu 1 cm, opisano trójkąt równoboczny. Oblicz pole tego trójkąta.
22. W trójkąt równoramienny, w którym wysokość ma długość 10 cm, a kąt przy podstawie ma miarę 30° , wpisano okrąg. Oblicz długość promienia tego okręgu.
23. Na trójkącie równoramiennym, o podstawie długości 8 cm i kącie przy podstawie 30° , opisano okrąg. Oblicz długość promienia tego okręgu.
24. Dwa okręgi są styczne wewnętrznie, a trójkąt prostokątny ABC wpisany jest w większy okrąg. Średnica małego okręgu ma długość równą połowie przeciwprostokątnej trójkąta ABC .
a) Wyjaśnij dlaczego trójkąty ABC i OBE są podobne i podaj skalę podobieństwa (O - środek większego okręgu, E - punkt wspólny mniejszego okręgu i przyprostokątnej BC).
b) Oblicz stosunek pól tych trójkątów.
25. W okrąg o środku O i promieniu $R = 6$ cm wpisano czworokąt $ABCD$. Kąty środkowe: $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$ i $\angle DOA$ mają odpowiednio miary: 45° , 150° , 135° i 30° . Oblicz pole czworokąta $ABCD$.
26. Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt o bokach długości 5, 5 i 8.
27. Ostrokątny trójkąt równoramienny ABC o podstawie AB jest wpisany w okrąg o środku S , przy czym kąt SAB ma miarę 40° . Oblicz miarę kąta CAB .
28. Szkic przedstawia kanał ciepłowniczy, którego przekrój poprzeczny jest prostokątem. Wewnątrz kanału znajduje się rurociąg składający się z trzech rur, każda o średnicy zewnętrznej 1 m. Oblicz wysokość i szerokość kanału ciepłowniczego. Wysokość zaokrąglaj do 0,01 m.



29. Z prostokąta o szerokości 60 cm wycina się detale w kształcie półkola o promieniu 60 cm. Sposób wycinania detali ilustruje rysunek. Oblicz najmniejszą długość prostokąta potrzebną do wycięcia dwóch takich detali. Wynik zaokrąglaj do pełnego centymetra.



30. Dany jest kwadrat. Pole koła opisanego na tym kwadracie jest o 8π większe od pola koła wpisanego w ten kwadrat. Oblicz pole kwadratu.
31. **Test wyboru.** Zaznacz poprawne odpowiedzi.

a) W trójkącie prostokątnym ABC kąt przy wierzchołku B wynosi 60° . Dwusieczna tego kąta wyznacza na przyprostokątnej AC punkt D tak, że $|BD| = a$ (cm). Obwód trójkąta ABC wynosi:
 (A) $\frac{3}{2}a(\sqrt{3} + 1)$ cm (B) $3\sqrt{3}$ cm (C) $3\sqrt{3}a + 1$ cm (D) $(\sqrt{3} + 3)a$ cm

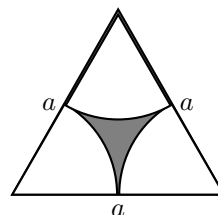
b) W prostokącie stosunek długości boków wynosi 2, a przekątna ma długość 5 cm. Pole prostokąta wynosi:
 (A) $2\sqrt{5}$ cm² (B) 5 cm² (C) 10 cm² (D) $5\sqrt{2}$ cm²

c) W trapezie równoramiennym podstawy mają długości 6 cm i 4 cm, a jego pole powierzchni 25 cm². Odległość punktu przecięcia przekątnych trapezu od dłuższej podstawy wynosi:
 (A) 3 cm (B) 2 cm (C) 5 cm (D) 4 cm

d) Obwody dwóch trójkątów podobnych są równe 12 cm i 36 cm, a suma pól tych trójkątów - 60 cm². Pola tych trójkątów wynoszą:
 (A) 24 cm² i 36 cm² (B) 20 cm² i 40 cm² (C) 30 cm² i 30 cm² (D) 6 cm² i 54 cm²

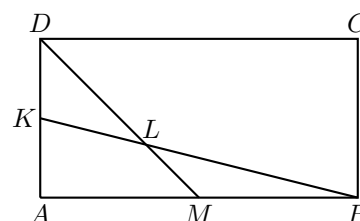
e) Dany jest trójkąt równoboczny o boku długości a . Z każdego wierzchołka trójkąta zakreślono koło o promieniu $\frac{a}{2}$. Pole powstałej figury wynosi:

- (A) $\frac{a^2}{8}(2\sqrt{3} - \pi)$ (B) $\frac{a^2}{8}\sqrt{3}$ (C) $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}\pi$ (D) $a^2(\pi - \sqrt{3})$.



f) W prostokącie $ABCD$ przeciwległe wierzchołki połączono ze środkami boków. Stosunek powierzchni czworokąta $AMLK$ do powierzchni czworokąta $BCDL$ wynosi:

- (A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{3}$



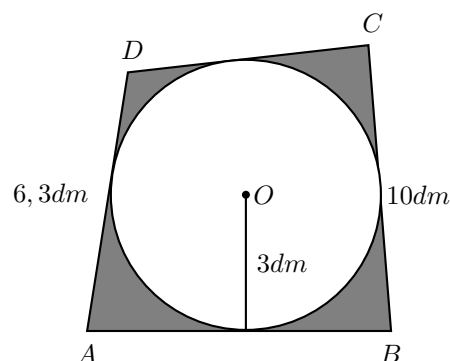
g) Okręgi o promieniach 6 i 8 są styczne. Jaka jest odległość między środkami tych okręgów?

- (A) 3 lub 4 (B) 2 lub 8 (C) 6 lub 8 (D) 2 lub 14

32. (R) Na kole opisany jest romb. Stosunek pola koła do pola rombu wynosi $\frac{\pi\sqrt{3}}{8}$. Wyznacz miarę kąta ostrego rombu.

33. (R) Proste zawierające ramiona BC i DA trapezu $ABCD$ przecinają się w punkcie S . Dane są: $|AB| = 6$, $|CD| = 2$ oraz obwód trójkąta SCD równy $\sqrt{18}$. Oblicz obwód trójkąta SAB .

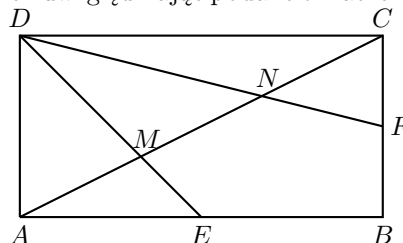
34. (R) Z kawałka materiału o kształcie i wymiarach czworokąta $ABCD$ (patrz na rysunek obok) wycięto okrągłą serwetkę o promieniu 3 dm. Oblicz, ile procent całego materiału stanowi jego niewykorzystana część. Wynik podaj z dokładnością do 0,01 procenta.



35. (R) W trójkącie prostokątnym ABC ($|\angle BCA| = 90^\circ$) dane są długości przyprostokątnych: $|BC| = a$ i $|CA| = b$. Dwusieczna kąta prostego tego trójkąta przecina przeciwprostokątną AB w punkcie D . Wykaż, że długość odcinka CD jest równa $\frac{a \cdot b}{a+b} \cdot \sqrt{2}$. Sporządź pomocniczy rysunek uwzględniając podane oznaczenia.

36. (R) W prostokącie $ABCD$ wierzchołek D połączono odcinkami ze środkami E i F boków AB i BC , zaś M i N to punkty przecięcia tych odcinków z przekątną AC (patrz rysunek).

- a) Uzasadnij, że odcinki AM , MN i NC są jednakowej długości.
b) Uzasadnij, że trójkąty AEM i CNF mają równe pola.

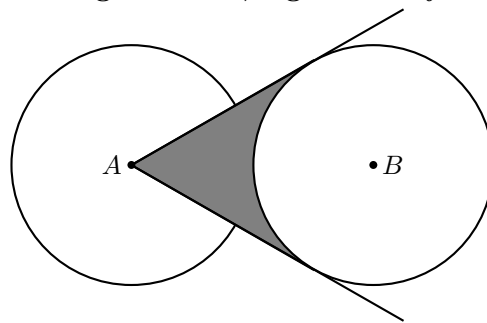


37. (R) a) Grupa sześciu przyjaciół kupiła tort w kształcie graniastosłupa prostego, którego jedną z podstaw jest trójkąt równoramienny ABC . W trakcie dyskusji - jak podzielić tort na 6 „równych” części, Krysia przypomniała sobie własność środkowych dowolnego trójkąta i przecięła tort wzdłuż środkowych narysowanych na powierzchni tortu (trójkąta ABC). Czy Krysia miała rację? Odpowiedź uzasadnij.

b) Dany jest taki czworokąt wypukły $ABCD$, że okręgi wpisane w trójkąty ABC i ADC są styczne. Wykaż, że w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg.

38. (R) Trójkąt prostokątny ABC , w którym $|\angle BCA| = 90^\circ$ i $|\angle CAB| = 30^\circ$ jest opisany na okręgu o promieniu $\sqrt{3}$. Oblicz odległość wierzchołka C trójkąta od punktu styczności tego okręgu z przeciwprostokątną. Wykonaj odpowiedni rysunek.

39. (R) Dwa okręgi, każdy o promieniu 8, są styczne zewnętrznie. Ze środka jednego z nich poprowadzono styczne do drugiego okręgu. Oblicz pole zacieniowanej figury (patrz rysunek).



40. (R) Dany jest równoległobok o bokach długości 16 i 10 oraz kącie ostrym 30° .

Oblicz:

- długość dłuższej wysokości równoległoboku,
- długość krótszej przekątnej równoległoboku.

41. (R) W pewnym trapezie kąty przy dwóch przeciwległych wierzchołkach mają miary α oraz $90^\circ + \alpha$. Jedno z ramion tego trapezu ma długość t . Wyznacz różnicę długości podstaw tego trapezu.

42. (R) Oblicz miary kątów dowolnego czworokąta wpisanego w okrąg o promieniu $R = 5\sqrt{2}$, wiedząc ponadto, że jedna z przekątnych tego czworokąta ma długość 10, zaś iloczyn sinusów wszystkich jego kątów wewnętrznych równa się $\frac{3}{8}$.

43. (R) Na okręgu opisano trapez prostokątny, którego długości ramion są równe 24 cm i 25 cm. Oblicz:

- długości podstaw trapezu,
- pole trapezu,
- długości przekątnych trapezu,
- długość okręgu,
- o ile procent obwód trapezu jest większy od długości okręgu,
- pole części trapezu znajdujące się poza kołem,
- stosunek pola trapezu do pola koła.

44. (R) Na okręgu o promieniu r opisano trapez równoramienny $ABCD$ o dłuższej podstawie AB i krótszej CD . Punkt styczności S dzieli ramię BC tak, że $\frac{|CS|}{|SB|} = \frac{2}{5}$.

- Wyznacz długość ramienia tego trapezu.
- Oblicz cosinus $|\angle CBD|$.

45. (R) Miary trzech kolejnych kątów czworokąta wpisanego w okrąg tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy $r = 52^\circ 32'$. Oblicz miary wszystkich kątów wewnętrznych tego czworokąta.

46. (R) Pole wycinka koła o promieniu 3 cm jest równe 2 cm^2 . Oblicz miarę łukową kąta środkowego tego wycinka.

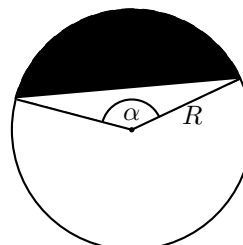
47. (R) Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Dane są $|BC| = a$, $|CD| = b$, $|\angle DAB| = \alpha$. Wyznacz długość przekątnej BD .

48. (R) Pole figury ograniczonej okręgiem opisanym na sześciokącie foremnym i brzegiem sześciokąta jest równe $4\pi - 6\sqrt{3}$. Wyznacz:

- długość boku tego sześciokąta foremnego,
- długość tego okręgu.

49. (R) Uzasadnij, że pole odcinka koła przedstawionego na rysunku można obliczyć według wzoru:

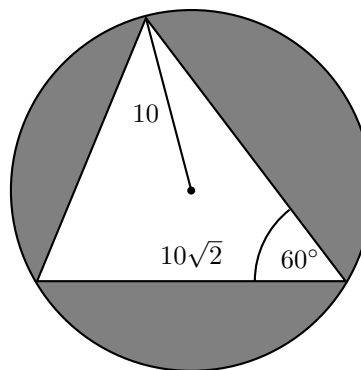
$$S = \frac{R^2}{2} \left(\frac{\pi}{180} \cdot \alpha - \sin \alpha \right).$$



50. (R) Boki trójkąta mają długości 5 , $3\sqrt{2}$, $\sqrt{13}$. Wyznacz miarę kąta znajdującego się naprzeciw najkrótszego boku oraz pole trójkąta.

51. (R) W trójkącie ABC , o kącie rozwartym przy wierzchołku C dane są długości boków $|AC| = 5 \text{ cm}$ i $|BC| = 12 \text{ cm}$. Oblicz długość boku AB wiedząc, że pole trójkąta jest równe 24 cm^2 .

52. (R) Oblicz pole zacieniowanej figury.



53. (R) Oblicz długość środkowej trójkąta opuszczonej na bok o długości 8, gdy pozostałe boki mają długość 6 i 7.
54. (R) Udowodnij twierdzenie: „Jeżeli w trójkąt prostokątny wpiszemy okrąg, to iloczyn długości odcinków, na które dzieli przeciwprostokątną punkt styczności z okręgiem równa się polu tego trójkąta.”