

1. Wykonaj działania na potęgach:
 - a) $(4x^{-1} + 3x)(4x - 3x^{-1})$
 - b) $(108^{\frac{1}{3}} + 64^{\frac{1}{3}} - 4^{\frac{1}{3}})2^{\frac{1}{3}}$
 - c) $(\sqrt[3]{5} - 1)^3$
 - d) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-1}$
 - e) $\frac{4\sqrt[3]{2}}{\sqrt{8}}\left(\frac{1}{2}\right)^5$
 - f) $\frac{3 \cdot 2^{2000} + 2^{2001}}{10^{1999}} \cdot 5^{2000}$
 - g) $\frac{3^7 + 3^6}{3^6 + 3^5}$
2. Przedstaw w postaci potęgi:
 - a) $\frac{\sqrt{x\sqrt{x}}}{x^5}(x\sqrt{x})^3$
 - b) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$
 - c) $\sqrt{5 + \sqrt{5 + \sqrt{5}}}$
3. Sprawdź, czy ciąg:
 - a) $(\sqrt{5} - \sqrt{3} - 2, \sqrt{5} - 2, \sqrt{5} + \sqrt{3} - 2)$ jest ciągiem arytmetycznym,
 - b) $(\sqrt{5} - 2, \frac{1}{\sqrt{5}-2}, 17\sqrt{5} + 38)$ jest ciągiem geometrycznym,
 - c) $(16, 2^{x-1}, 4^{x-3})$ jest ciągiem geometrycznym.
4. Do wykresu funkcji wykładniczej należy punkt $A = (-1, \frac{1}{3})$. Podaj wzór tej funkcji.
5. Naskicuj wykres funkcji:
 - a) $y = 4^{-x} - 4$
 - b) $y = \frac{2^x}{2} - 3$
 - c) $f(x) = 2^x - 1$ określonej w przedziale $\langle -2, 2 \rangle$
 - d) $f(x) = 2^{x-1}$ określonej w przedziale $\langle -2, 2 \rangle$.
6. Wykonaj wykres funkcji $f(x) = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$ i podaj miejsca zerowe oraz zbiór wartości funkcji.
7. Oblicz:
 $4^{\log_4 18}$
 $3^{\log_3 7}$
 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 11}$
 $\log 1$
 $\log_7 7$
 $\log_4 64$
 $\log_{\frac{1}{2}} b = 5$
 $\log_{\sqrt{2}} b = -6$
 $\log_{27} b = \frac{2}{3}$
8. Oblicz:
 - a) $\log 125 + \log 4 - \log 5$
 - b) $\log_3 36 - \log_3 2 + \log_3 \frac{1}{6}$
 - c) $\log_{\frac{1}{2}} 0,6 - \log_{\frac{1}{3}} 0,15$
 - d) $\log_7 19 - \log_7 \frac{19}{49}$
9. Dany jest $\log x = \frac{1}{3}$. Oblicz:
 - a) $\log x^6$
 - b) $\log \frac{1}{x^3}$
 - c) $\log \sqrt{x}$
 - d) $\log \frac{1}{\sqrt{x^3}}$
10. Dany jest $\log_3 x = -\frac{1}{4}$. Oblicz:
 - a) $\log_3 9x^8$
 - b) $\log_3 \frac{x^4}{81}$
 - c) $\log_3 \sqrt[4]{3x^6}$

11. Przedstaw podane wyrażenia w postaci jednego logarytmu:
a) $2\log_3 x + \log_3 y + 1$
b) $\frac{1}{2}\log_2 x - \log_2 y - 2$
c) $\frac{1}{3}\log_5 8x^3 - 2\log_5 \sqrt{x}y + \frac{1}{2}$
d) $\frac{1}{2}\log 4x^4 + \frac{1}{3}\log x^6 + \frac{1}{4}\log 16x^3 - 3$
12. Wiemy, że $\log_2 5 = a$. Wyznacz $\log_{25} 8$.
13. Dana jest funkcja $f(x) = \log_2 x$. Oblicz $\frac{f(12)-2}{f(3)}$.
14. Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek: $\log_4 c = \log_3 b = \log_2 a = 2$. Oblicz $\sqrt{abc}$.
15. Wykaż, że prawdziwa jest równość:
a) $\log_2 25 + \log_4 25 = \log_2 125$
b) $\log_{0,1} 4 + \log_{0,01} 16 = \log_{\frac{1}{16}}$
c) $\log_3 4 + \log_9 4 = \log_{\frac{1}{3}} 0,125$
16. **Test wyboru.** Zaznacz poprawne odpowiedzi.
- a) Wartością wyrażenia $9^{3\log_2 75 + \log_3 2}$ jest:
(A) 7 (B) 10 (C) 30 (D) 100
- b) Liczba $a = 4 \cdot 25^{\frac{1}{2}\log_5 7 - \log_5 2}$ jest liczbą:
(A) niewymierną (B) naturalną (C) pierwszą (D) złożoną
- c) Liczba $\log_4(-\log_3(\log_2 \sqrt[9]{8}))$ jest liczbą:
(A) całkowitą (B) wymierną (C) niewymierną (D) ujemną
- d) Wartość iloczynu $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \dots \cdot \log_{10} 9$ jest równa:
(A) $\frac{1}{\log_2 10}$ (B) $\log_{10} 2$ (C) $\log_{10} 9!$ (D) $\log_3 9$
17. (R) Sporządź wykres funkcji:
a) $f(x) = -|x+4|^{\frac{1}{2}} + 2$
b) $f(x) = -(x+3)^{-1} - 2$
c) $f(x) = (x-2)^3 - 4$
18. (R) Narysuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji f i g opisane wzorami: $f(x) = 2^{x-1}$ i $g(x) = |2x+1|$ oraz na podstawie ich wykresów odczytaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = g(x)$.
19. (R) Dwa ciała poruszają się ruchem jednostajnym; pierwsze z prędkością $v_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2t-1} \frac{cm}{s}$, a drugie z prędkością $v_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^{4-t} \frac{cm}{s}$, gdzie t oznacza czas liczony w sekundach od początku obserwacji tych ciał. Kiedy stosunek v_1 do v_2 jest mniejszy od $\frac{32}{243}$?
20. (R) Rozwiąż równanie:
a) $4^x - 8 \cdot 2^x = 0$
b) $5^{x-1} - 5 \cdot 2^x = 5^{x-2} + 5 \cdot 2^{x-2}$
c) $7^{x-2} \cdot 16^x = 2^{3x+2}$
d) $3^{x+2} - 3^x = 72$
e) $5^x + 5^{3-x} = 30$
f) $9 \cdot 4^{\frac{1}{x}} + 5 \cdot 6^{\frac{1}{x}} = 4 \cdot 9^{\frac{1}{x}}$
21. (R) Rozwiąż nierówność:
a) $25 \cdot (0,2)^{x^2} < 5^x$
b) $1 < 2^{x^2} \leq 2^x$

- c) $16^x - 4^x \leq 0$
 d) $4^x + 2^{x+1} \leq 15$
 e) $6^x \leq 11^x$
 f) $2^{x+2} - 2^x < 48$

22. (R) a) Dla jakich wartości x określone jest wyrażenie: $\sqrt{6^x + 6^{2-x} - 37}$?

b) Dla jakich wartości x funkcja $f(x) = \frac{\sqrt{8-2^x}}{\log x}$ jest określona?

c) Określ dziedzinę funkcji: $f(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^x - 4} + \frac{1}{\sqrt{27-3^x}}$.

23. (R) Rozwiąż nierówność: $h(g(x)) \geq \frac{1}{16}$, jeżeli $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ i $g(x) = x^2 - 5$.

24. (R) Nie korzystając z kalkulatora, oblicz:

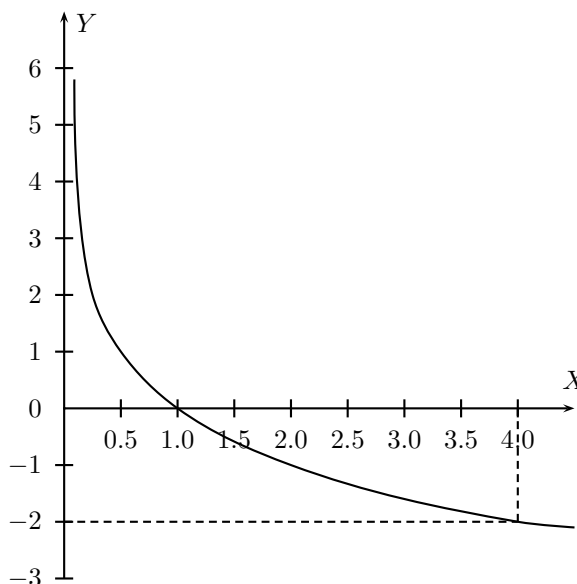
- a) $\log_{\frac{1}{9}} \frac{\sqrt[3]{3}}{3}$
 b) $9^{6\log_{81} 2 + \log_3 2}$
 c) $\log_{0,25} 27 \cdot \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{8}$

25. (R) Wyznacz $\log_{16} 6$ jeżeli wiesz, że $\log_2 12 = a$

26. (R) Oblicz:

- a) $3^{\log_3 \sqrt{3}^{27}}$
 b) $(\sqrt[3]{4})^{\log_4 \sqrt{2}^{32}}$
 c) $5^{\log_3 7} - 7^{\log_3 5}$

27. (R) Na rysunku przedstawiono wykres funkcji logarytmicznej f . Rozwiąż równanie $(f(x))^2 - 16 = 0$.



28. (R) Rozwiąż równanie $\log_5(\log_4(\log_2 x)) = 0$.

29. (R) Rozwiąż równanie $\log_{\frac{1}{4}} x \cdot \log_2 x = -\frac{1}{2}$.

30. (R) Rozwiąż równanie:

- a) $\log(x+1, 5) = -\log x$
 b) $\log_2 x + 1 = 2\log_x 2$
 c) $\log_x(3x+4) = 2$
 d) $\frac{2}{\log_3 x - 1} + 1 = 6\log_x 3$
 e) $x^{1+\log_2 x} = 4$

31. (R) Rozwiąż nierówność:

- a) $\log_3 |x+3| < 0$
 b) $\log_2(\log_{\frac{1}{5}}(x-1)) > 1$
 c) $\log_x(x+2) \leq 2$
 d) $\log^3 2x - \log^2 2x \geq 0$
 e) $\log_{0,5}(x+4) - \log_{0,5}(3x-1) \leq 0$

32. (R) Niech $A = \{x \in \mathbb{R} : \log_2(3x-1) < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x^3 \geq 4x\}$. Wyznacz zbiory: A , B , $A \cap B$.

33. (RR) Rozwiąż równanie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\log_2 4x + \log_2^2 4x + \log_2^3 4x + \dots + \log_2^n 4x) = 1 + \frac{1}{2} \log_2 x.$$

34. (RR) Dany jest nieskończony ciąg geometryczny, którym $a_1 = \log_3 x$ i iloraz $q = \log_3 x$. Oznaczmy przez $f(x)$ sumę tego ciągu.
- a) Wyznacz dziedzinę funkcji f .
 - b) Rozwiąż nierówność $f(x) > 1$.

35. (RR) Rozwiąż równanie: $1 + \log_8 x + \log_8^2 x + \log_8^3 x + \dots = 3$.

36. (RR) Rozwiąż układ równań:

- a)
$$\begin{cases} 3^x \cdot 5^{y+1} = 9 \\ 3^{x-2} + 5^{y+2} = 6. \end{cases}$$
- b)
$$\begin{cases} 3x + y = 8^{\log_8 12} \\ x^2 + y^2 - 2xy = \log_2 144 - \frac{1}{2} \log_2 81 \end{cases}$$

37. (RR) Dany jest ciąg (x_n) , o wyrazach dodatnich, w którym

$$\begin{cases} \log_2 x_1 = -2 \\ \log_2 x_n - \log_2 x_{n-1} = -2, \text{ dla } n \in \mathbb{N}_+ \setminus \{1\} \end{cases}$$

Wykaż, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{3}.$$

38. (RR) Rozwiąż nierówność $\frac{2+m^{2x}}{1-m^x} > -6$ przy założeniu, że wartość parametru m należy do przedziału $(0, 1)$.