

1. a) Podnosząc liczbę dodatnią $3 - \sqrt{5}$ do kwadratu otrzymamy

$$(3 - \sqrt{5})^2 = 14 - 6\sqrt{5}.$$

Stąd otrzymujemy ciekawą równość

$$\sqrt{14 - 6\sqrt{5}} = 3 - \sqrt{5}.$$

Zaproponuj analogiczną równość dotyczącą liczby $\sqrt{11 + 4\sqrt{7}}$. Uzasadnij zaproponowaną równość.

- b) Pokażemy, że liczby $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$ i $2 + \sqrt{3}$ są równe, czyli, że $\frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}{2+\sqrt{3}} = 1$.
Najpierw rozszerzymy ułamek, żeby usunąć niewymierność z mianownika:

$$\frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{(7+4\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^2}}{4-3} = \sqrt{(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})} = \sqrt{49-48} = 1.$$

Pokaż podobnie, że $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 1$.

2. Istnieje wygodny sposób szybkiego podnoszenia do kwadratu liczb dwucyfrowych kończących się cyfrą 5:
 $35^2 = 100 \cdot 3 \cdot 4 + 25 = 1225$,
 $75^2 = 100 \cdot 7 \cdot 8 + 25 = 5625$,
który wynika z następującego rozumowania:

$$(10a + 5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = 100a(a + 1) + 25.$$

Znajdź sposób szybkiego podnoszenia do kwadratu liczb złożonych z całości i $\frac{1}{2}$ i uzasadnij go. Oblicz w ten sposób $(4\frac{1}{2})^2$ oraz $(9\frac{1}{2})^2$.

3. Aby wyznaczyć wszystkie liczby całkowite c , dla których liczba postaci $\frac{c-3}{c-5}$ jest także liczbą całkowitą można postąpić w następujący sposób:
a) Wyrażenie w liczniku ułamka zapisujemy w postaci sumy, której jednym ze składników jest wyrażenie z mianownika:

$$\frac{c-3}{c-5} = \frac{(c-5)+2}{c-5}$$

- b) Zapisujemy powyższy ułamek w postaci sumy liczby 1 oraz pewnego ułamka:

$$\frac{c-5+2}{c-5} = \frac{c-5}{c-5} + \frac{2}{c-5} = 1 + \frac{2}{c-5}$$

c) Zauważamy, że ułamek $\frac{2}{c-5}$ jest liczbą całkowitą wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $(c-5)$ jest całkowitym dzielnikiem liczby 2, czyli że $(c-5) \in \{-1, 1, -2, 2\}$.

d) Rozwiązujemy kolejno równania $c-5 = -1$, $c-5 = 1$, $c-5 = -2$, $c-5 = 2$, i otrzymujemy odpowiedź: liczba postaci $\frac{c-3}{c-5}$ jest całkowita dla: $c = 4$, $c = 6$, $c = 3$, $c = 7$.

Rozumując analogicznie, wyznacz wszystkie liczby całkowite x , dla których liczba postaci $\frac{x}{x-3}$ jest liczbą całkowitą.

4. Sumę $S = \frac{3}{1 \cdot 4} + \frac{3}{4 \cdot 7} + \frac{3}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{3}{301 \cdot 304} + \frac{3}{304 \cdot 307}$ można obliczyć w następujący sposób:
a) sumę S zapisujemy w postaci

$$S = \frac{4-1}{4 \cdot 1} + \frac{7-4}{7 \cdot 4} + \frac{10-7}{10 \cdot 7} + \dots + \frac{304-301}{304 \cdot 301} + \frac{307-304}{307 \cdot 304}$$

- b) każdy składnik tej sumy przedstawiamy jako różnicę ułamków

$$S = \left(\frac{4}{4 \cdot 1} - \frac{1}{4 \cdot 1} \right) + \left(\frac{7}{7 \cdot 4} - \frac{4}{7 \cdot 4} \right) + \dots + \left(\frac{304}{304 \cdot 301} - \frac{301}{304 \cdot 301} \right) + \left(\frac{307}{307 \cdot 304} - \frac{304}{307 \cdot 304} \right)$$

stąd

$$S = \left(1 - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10} \right) + \dots + \left(\frac{1}{301} - \frac{1}{304} \right) + \left(\frac{1}{304} - \frac{1}{307} \right)$$

więc

$$S = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{301} - \frac{1}{304} + \frac{1}{304} - \frac{1}{307}$$

c) obliczamy sumę, redukując parami wyrazy sąsiednie, poza pierwszym i ostatnim

$$S = 1 - \frac{1}{307} = \frac{306}{307}$$

Postępując w analogiczny sposób, oblicz sumę

$$S_1 = \frac{4}{1 \cdot 5} + \frac{4}{5 \cdot 9} + \frac{4}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{4}{281 \cdot 285}$$

5. Wiadomo, że wielomian określony wzorem $W(x) = x^4 + 1$ nie ma pierwiastków rzeczywistych, bo dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ wyrażenie $x^4 + 1$ przyjmuje wartości dodatnie. Można go jednak rozłożyć na iloczyn czynników nierozkładalnych stopnia drugiego w następujący sposób:

- najpierw zapisujemy wyrażenie $x^4 + 1$ w postaci sumy kwadratów: $(x^2)^2 + 1^2$;
- następnie uzupełniamy tę sumę do pełnego kwadratu (jak poniżej):

$$(x^2)^2 + 1^2 = (x^2)^2 + 2x^2 + 1^2 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2;$$

- otrzymaną różnicę $(x^2 + 1)^2 - 2x^2$ zapisujemy w postaci różnicy kwadratów:

$$(x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2;$$

- stosujemy wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów:

$$(x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = (x^2 + 1 - \sqrt{2}x)(x^2 + 1 + \sqrt{2}x);$$

- i otrzymujemy rozkład wielomianu $W(x)$ na iloczyn czynników nierozkładalnych:

$$W(x) = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1).$$

- Postępując analogicznie, rozłóż na czynniki nierozkładalne wielomian $Q(x) = x^4 + 9$.

6. Aby wyznaczyć wszystkie pary (x, y) liczb całkowitych spełniające równanie: $xy = x - y + 3$, można postąpić następująco:

krok 1. Najpierw przekształcamy to równanie do postaci: $(xy - x) + y = 3$

krok 2. Następnie z pierwszego składnika sumy po lewej stronie tego równania, czyli z nawiasu, wyłączamy wspólny czynnik przed nawias a drugi składnik sumy uzupełniamy do wyrażenia, które występuje w nawiasie tak, by równania pozostały równoważne:

$$x(y - 1) + (y - 1) = 3 - 1.$$

krok 3. Lewą stronę otrzymanego równania zapisujemy w postaci iloczynowej przez wyłączenie wspólnego czynnika $(y - 1)$ przed nawias:

$$(y - 1)(x + 1) = 2.$$

krok 4. Ponieważ lewa strona tego równania jest iloczynem dwóch czynników całkowitych, więc jego prawą stronę, czyli liczbę 2 również przedstawiamy w postaci iloczynu dwóch liczb całkowitych:

$$(y - 1)(x + 1) = 2 = 1 \cdot 2 = 2 \cdot 1 = (-1) \cdot (-2) = (-2) \cdot (-1).$$

krok 5. Porównujemy obie strony równania i zapisujemy je w postaci alternatywy czterech układów równań (bo tyle otrzymaliśmy rozkładów liczby 2 w postaci iloczynu liczb całkowitych):

$$[(x + 1)(y - 1) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{cases} x + 1 = 1 \\ y - 1 = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x + 1 = 2 \\ y - 1 = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x + 1 = -1 \\ y - 1 = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x + 1 = -2 \\ y - 1 = -1 \end{cases} \right]$$

krok 6. Rozwiązujemy powyższe układy równań:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases}$$

krok 7. Na koniec wyciągamy wniosek, że jedynymi parami liczb całkowitych spełniającymi wyjściowe równanie są pary liczb: $(0, 3), (1, 2), (-2, -1), (-3, 0)$.

Postępując analogicznie, wyznacz wszystkie pary liczb całkowitych spełniające równanie: $xy = 2x - y + 5$.

7. Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b określamy liczby $a \circ b, a * b$ w następujący sposób:

$a \circ b$ = liczba nie mniejsza spośród liczb a i b

$a * b$ = liczba nie większa spośród liczb a i b .

Na przykład: $7 \circ 3 = 7, 15 \circ 15 = 15, 7 * 3 = 3, (-6) * 4 = -6, (-3) * (-3) = -3$.

Oblicz:

a) $(-5) \circ 4 =$

b) $(2005 * 2007) \circ (-2006) =$

c) $(5 \circ 6) * (2 \circ 7) =$

8. (R) Dany jest algorytm (Euklidesa) obliczania $NWD(a, b)$ i $NWW(a, b)$:
niech $a = 22991$ i $b = 19667$,

$$22991 > 19667$$

$\Downarrow$

$$22991 = 1 \cdot 19667 + 3324$$

$$19667 = 5 \cdot 3324 + 3047$$

$$3324 = 1 \cdot 3047 + 277$$

$$3047 = 11 \cdot 277 + 0$$

$\Downarrow$

$$NWD(22991, 19667) = 277$$

$$NWW(22991, 19667) = \frac{22991 \cdot 19667}{277} = 1632361.$$

Korzystając z podanego algorytmu oblicz:

$$NWD(1615, 2618) \text{ i } NWW(1615, 2618)$$

9. (R) Sumę kolejnych liczb nieparzystych od 1 do 999, tzn. sumę

$$S = 1 + 3 + \dots + 995 + 997 + 999$$

można obliczyć grupując składniki parami:

$$S = (1 + 999) + (3 + 997) + \dots + (499 + 501),$$

tak, że suma liczb każdej pary wynosi 1000. Par jest 250, bo składników było 500, stąd:

$$S = 250 \cdot 1000 = 250000.$$

Analogicznie oblicz sumę:

$$S = 5 + 10 + \dots + 990 + 995 + 1000.$$

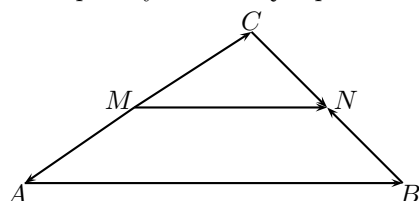
10. (R) „Liczba naturalna jest podzielna przez 36, gdy jest podzielna przez 4 i jest podzielna przez 9”. Np. Liczba 187524 jest podzielna przez 36, bo jest podzielna przez 9, gdyż jej suma cyfr $1 + 8 + 7 + 5 + 2 + 4 = 27$ jest podzielna przez 9 oraz jest podzielna przez 4, bo liczba utworzona z dwóch ostatnich cyfr, czyli liczba 24 jest podzielna przez 4.

a) Wykorzystując podaną zasadę podzielności, sprawdź, że liczba 24110352 jest podzielna przez 36.

b) Podaj, jaką cyfrą powinno zastąpić się X , aby liczba 51403X8 była podzielna przez 36.

c) Uzasadnij, że liczby naturalne postaci $10^n + 8$, gdzie n jest liczbą naturalną większą od 1, są podzielne przez 36.

11. (R) W dowolnym trójkącie ABC punkty M i N są odpowiednio środkami boków AC i BC



Zapoznaj się uważnie z następującym rozumowaniem:

Korzystając z własności wektorów i działań na wektorach, zapisujemy równości:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \quad (1)$$

oraz

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN} \quad (2)$$

Po dodaniu równości (1) i (2) stronami otrzymujemy:

$$2 \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN}$$

Ponieważ $\overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MA}$ oraz $\overrightarrow{CN} = -\overrightarrow{BN}$, więc:

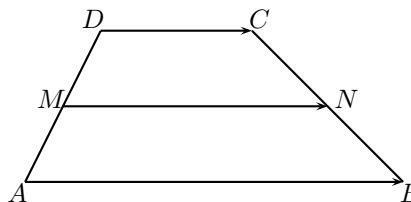
$$2 \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BN}$$

$$2 \cdot \overrightarrow{MN} = \vec{0} + \overrightarrow{AB} + \vec{0}$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Wykorzystując własności iloczynu wektora przez liczbę, ostatnią równość można zinterpretować następująco: **odcinek łączący środki dwóch boków dowolnego trójkąta jest równoległy do trzeciego boku tego trójkąta, zaś jego długość jest równa połowie długości tego boku.**

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie, ustal związek pomiędzy wektorem $\overrightarrow{MN}$ oraz wektorami $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$, wiedząc, że czworokąt $ABCD$ jest dowolnym trapezem, zaś punkty M i N są odpowiednio środkami ramion AD i BC tego trapezu



Podaj interpretację otrzymanego wyniku.

12. (RR) Korzystając z równości $\frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$, można obliczyć następującą granicę:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} \right) &= \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \right) &= \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right) &= 1 \end{aligned}$$

Wykaż równość $\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{n(2n+2)}$, a następnie, korzystając z niej, oblicz granicę:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 6} + \frac{1}{3 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{n \cdot (2n+2)} \right).$$