

1. Wykonaj działania i oblicz wartość wyrażenia $\left\{ \left[\left(\frac{1}{2}x^{-2}y \right)^3 : \left(\frac{8}{y^2} \right)^{-1} \right] \cdot \left(-\frac{1}{4}xy^3 \right) \right\} : (\sqrt{2}x^{-2}y)^2$ dla $x = -0,375$, $y = 2\sqrt{3}$.
2. Wiadomo, że $\frac{x+2y}{x-2y} = 7$. Oblicz $\frac{x+3y}{x-3y}$.
3. Uprość wyrażenie: $\left(\frac{x}{x-y} - \frac{x}{x+y} \right) \frac{x^2+xy}{x^2y^2}$.
4. Dane są wyrażenia $u = \frac{3x^2+12x}{(x-1)(x+4)}$ i $w = \frac{x^2-x-2}{x^2+2x+1}$.
 - a) Wyznacz dziedzinę każdego z nich.
 - b) Skróć ułamki u i w .
 - c) Zapisz $u + w$ w postaci ułamka.
5. Podaj dziedzinę funkcji i sprowadź ją do najprostszej postaci:
 - a) $f(x) = \frac{x^3-2x^2+4x-8}{x^4-16}$
 - b) $f(x) = \frac{(x^3-1)(x^2-4)}{(x^2+x-2)(x-2)}$
6. Wyznacz tak parametry a i b , aby do wykresu funkcji $y = \frac{ax+b}{x+5}$ należały punkty $A = (-4, 6)$, $B = (-6, -12)$. Znajdź miejsca zerowe tej funkcji.
7. Do wykresu funkcji $f(x) = \frac{2}{x}$ i $g(x) = \frac{3}{x-1}$ należy punkt $A = (x_0, y_0)$. Wyznacz współrzędne tego punktu. Wyznacz parametr a , aby ten punkt należał też do hiperboli o równaniu $h(x) = \frac{x+a}{x+4}$.
8. Wyznacz wszystkie wartości zmiennej x , dla których wartości funkcji $f(x) = \frac{3}{x-1}$ są równe wartościom funkcji $g(x) = \frac{4}{x+4}$.
9. Wykresy funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ i $g(x) = \frac{1}{k-1}x$ przecinają się w punkcie, którego rzędna równa się $\frac{1}{3}$.
 - a) Oblicz odciętą punktu przecięcia wykresów.
 - b) Oblicz k .
 - c) Dla obliczonego k rozwiąż równanie $\frac{1}{4}f(x) = g(x)$.
10. Iloczyn liczb x i y jest równy połowie ich sumy. Wyznacz liczbę y jako funkcję liczby x dla $x \neq \frac{1}{2}$.
11. Dane jest równanie $-x + xy - y - 3 = 0$. Wyznacz y w zależności od x . Ustal warunki istnienia takiej zależności oraz x , dla którego y przyjmuje wartość 5.
12. a) Odległość między dwiema przystaniami położonymi na rzece wynosi 8 km. Łódka przepływa tę drogę w obie strony w czasie 1 h i 40 minut. Oblicz prędkość łódki na wodzie stojącej, jeśli wiadomo, że prędkość prądu rzeki wynosi $2 \frac{km}{h}$.
b) Dwie maszyny, pracując równocześnie, wykonują pewną pracę przez 8 godzin. Gdyby pracowała tylko pierwsza z nich, to wykonywałaby tę pracę przez 24 godziny. Ile czasu wykonywałaby tę pracę tylko druga maszyna?
13. Wykonaj działania, określ dziedzinę:
 - a) $\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3-8} \cdot \frac{x^2-4}{x^2-2x+1}$
 - b) $\frac{x+1}{x-1} : \frac{x^2+x}{3x-3}$
 - c) $\frac{x+3}{x-3} + \frac{x-3}{x+3} - \frac{x^2+9}{x^2-9}$
 - d) $\left(x - \frac{x-2}{1+2x} \right) : \left(1 + \frac{x(x-2)}{1+2x} \right)$
14. Rozwiąż równania:
 - a) $x + 1 = \frac{2}{x}$
 - b) $\frac{2x-3}{x-3} = 3$
 - c) $\frac{x}{x+1} = \frac{2x}{x-1}$
 - d) $\frac{2x+5}{x+1} = \frac{2}{x}$

15. **Test wyboru.** Zaznacz poprawne odpowiedzi.

a) Dziedziną funkcji $F(x) = \frac{3x-1}{x^3+2x^2-4x-8}$ jest zbiór:

- (A) $\{-2; 2\}$ (B) $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ (C) $\mathbb{R}$ (D) $\langle -2, 2 \rangle$

b) Miejscami zerowymi funkcji $F(x) = \frac{x^3-13x+12}{x+4}$ są liczby:

- (A) $-4, 1, 3$ (B) $-3, 1, 4$ (C) $3, 1$ (D) -4

c) Rozwiązaniem równania $\frac{2x+5}{x+1} = \frac{2}{x}$ jest:

- (A) $\{-1; 0\}$ (B) $\{-2; -1; 0; 5\}$ (C) $\{-2; 0, 5\}$ (D) $\{-2, -1\}$

d) Przesuwając wykres funkcji $y = \frac{-2}{x}$ równoległe do osi OX w prawo o 5 jednostek oraz równoległe do osi OY w dół o 3 jednostki, otrzymasz wykres funkcji:

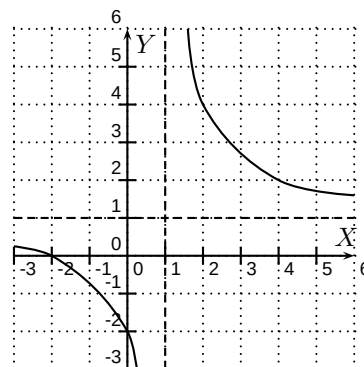
- (A) $g(x) = \frac{-2}{x+3} + 5$ (B) $g(x) = \frac{-2}{x-5} - 3$ (C) $g(x) = \frac{-2}{x+5} + 3$ (D) $g(x) = \frac{-2}{x-5} + 3$

16. (R) Naskicuj wykres funkcji, wyznacz jej dziedzinę, zbiór wartości, podaj równania asymptot, oblicz miejsca zerowe, określ argument, dla którego funkcja przyjmuje wartości dodatnie, ujemne, podaj przedziały monotoniczności:

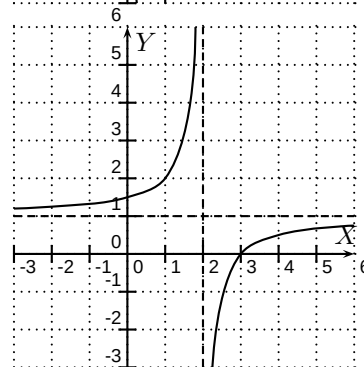
a) $f(x) = 1 - \frac{4}{x+2}$

b) $f(x) = \frac{-3x-6}{x+3}$

17. (R) W oparciu o wykres funkcji wymiernej określonej wzorem $f(x) = \frac{ax+2}{bx+c}$, wyznacz wartości a, b, c .



18. (R) Asymptotą pionową wykresu funkcji f o wzorze $f(x) = \frac{ax+b}{x+d}$, jest prosta o równaniu $x = 2$, a asymptotą poziomą prosta $y = 1$. Wyznacz wzór funkcji f .



19. (R) Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{1}{x+1} - 1$ dla wszystkich liczb rzeczywistych $x \neq -1$. Rozwiąż nierówność $f(x) > f(2-x)$.

20. (R) Dana jest funkcja określona wzorem $f(x) = \frac{3x-1}{2x+3}$.

a) Wyznacz dziedzinę i miejsca zerowe funkcji f .

b) Rozwiąż nierówność: $f(x) + 1 \leq f(x-3)$.

21. (R) Dana jest funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$. Rozwiąż nierówność $f(x) - f(\frac{1}{x}) \leq f(x^3) - f(\frac{1}{x^3})$.

22. (R) Rozpatrujemy wszystkie prostokąty o polu równym 6, których dwa sąsiednie boki zawarte są w osiach OX i OY układu współrzędnych. Wyznacz równanie krzywej będącej zbiorem tych wierzchołków rozpatrywanych prostokątów, które nie leżą na żadnej z osi układu współrzędnych. Narysuj tę krzywą.
23. (R) Znajdź równanie prostej $y = ax + b$ ($a \neq 0$), której jedynym punktem wspólnym z wykresem funkcji $y = \frac{1}{x}$ jest punkt $(1, 1)$. Oblicz pole trójkąta ograniczonego osiami układu współrzędnych i tą prostą.
24. (R) Sporządź wykres funkcji $f(x) = \left| \frac{x-4}{x-2} \right|$, a następnie korzystając z tego wykresu, wyznacz wszystkie wartości parametru k , dla których równanie $\left| \frac{x-4}{x-2} \right| = k$, ma dwa rozwiązania, których iloczyn jest liczbą ujemną.
25. (R) Funkcja homograficzna f jest określona wzorem $f(x) = \frac{px-3}{x-p}$, gdzie $p \in \mathbb{R}$ jest parametrem i $|p| \neq \sqrt{3}$.
- a) Dla $p = 1$ zapisz wzór funkcji w postaci $f(x) = k + \frac{m}{x-1}$, gdzie k oraz m są liczbami rzeczywistymi.
- b) Wyznacz wszystkie wartości parametru p , dla których w przedziale $(p, +\infty)$ funkcja f jest malejąca.
26. (R) Rozwiąż równanie:
- a) $x + \frac{21}{x} = 10$
- b) $x + \frac{3}{x-3} = \frac{2x+3}{3-x}$
- c) $\frac{x+2}{x} + \frac{x}{x+2} = 2$
- d) $1 + \frac{x}{x+2} = \frac{2x^2}{x^2-4}$
27. (R) Rozwiąż nierówność:
- a) $\frac{3}{x-2} \leq \frac{2}{x+3}$
- b) $x \geq \frac{x+1}{1-x}$
- c) $\frac{2x-5}{3-4x} > 1$
28. (R) Przedział $(-\frac{3}{2}, 0)$ jest zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności $\frac{2}{x} < m$ z niewiadomą x . Oblicz m .
29. (R) Wyznacz wszystkie wartości x spełniające warunek: $-3 < \frac{1}{x} < -\frac{1}{2}$.
30. (R) Wyznacz dziedzinę funkcji f określonej wzorem: $f(x) = \sqrt{\frac{x^3-2x^2-x+2}{x+4}}$.
31. (R) Uzasadnij, że funkcja $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ przyjmuje dla dodatnich argumentów wartości nie mniejsze od 3.
32. (R) Rozwiąż równanie:
- a) $\frac{5-x}{x^2-1} - \frac{2x-1}{x^2+x+1} = \frac{5x+4}{x^3-1}$
- b) $\left| \frac{3}{|x+2|} - 1 \right| = 8$
- c) $\left| \frac{6x-3}{2x+1} \right| = 3$
33. (R) Rozwiąż nierówność:
- a) $\frac{(x-2)^3(x-1)}{(x-5)^2(x+1)} \leq 0$
- b) $\frac{x^3-x+6}{x^2} \geq 0$
- c) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} > \frac{1}{x^2+3x+2}$
- d) $\frac{1}{|4-3x|} > 2$
- e) $\left| \frac{2x-1}{x+2} \right| < 3$
- f) $\left| \frac{1}{|x|} \right| < 1$