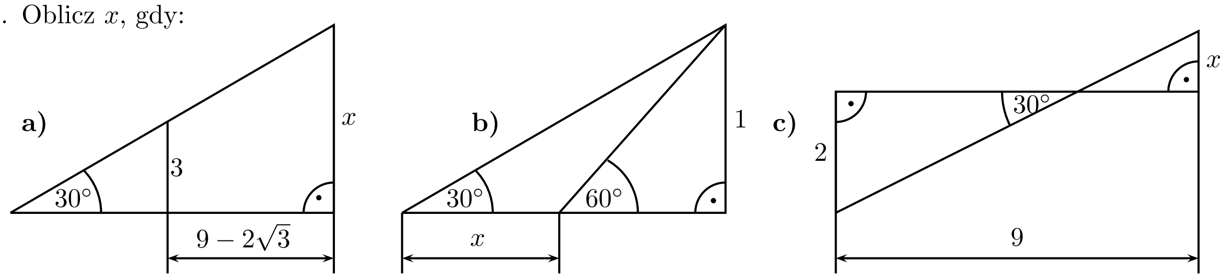
1. Wyznacz długości boków trójkąta prostokątnego ABC oraz wartości funkcji trygonometrycznych kąta $\sphericalangle CAB$ mając dane $sin|\sphericalangle(CAB)| = \frac{4}{5}$ i $|BC| = 2$.

2. Rozwiąż trójkąt prostokatny mając dane przyprostokątne $a = \sqrt{2} - 1,\ \ b = \sqrt{6} - \sqrt{3}$.

3. Oblicz x, gdy:



4. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta AOB, gdzie $A = (4, 0)$, $B = (-4, 3)$, O jest początkiem układu współrzędnych.

5. Naszkicuj w układzie współrzędnych kąt α taki, że
   a) $sin\alpha = -\frac{1}{3} \ \wedge\ \alpha \in \langle 270°, 360° \rangle$
   b) $cos\alpha = \frac{4}{5}$
   c) $tg\alpha = 2 \ \wedge\ \alpha \in \langle 180°, 270° \rangle$
   d) $ctg\alpha = -\frac{5}{3}$

6. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta:
   a) $\beta = 120°$
   b) $\beta = 210°$
   c) $\beta = 315°$

7. Oblicz:
   a) $sin765°$
   b) $cos1200°$
   c) $sin(-1710°)$
   d) $tg(-750°)$
   e) $cos(-450°)$
   f) $ctg(-1395°)$
   g) $sin(-7\pi)$
   h) $cos\frac{15}{2}\pi$
   i) $ctg(-\frac{23}{4}\pi)$
   j) $tg\frac{13}{3}\pi$
   k) $2sin150° - 3cos120° + tg135°$

8. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta x, gdy:
   a) $sinx = -\frac{\sqrt{5}}{5} \ \wedge\ x \in \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$
   b) $tgx = -3 \ \wedge\ x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$
   c) $cosx = \frac{2}{3}$

9. Wiedząc, że $tg\alpha = 3ctg\alpha$, oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta o mierze α, gdzie $\alpha \in (0°, 90°)$.

10. Wiadomo, że α jest kątem wypukłym oraz $3cos\alpha - 6 = -8$. Oblicz $tg\alpha - \sqrt{5}ctg\alpha$.

11. Sprawdź, czy istnieje taka liczba x, dla której:
    a) $sinx = 0,6 \ \wedge\ cosx = 0,8$
    b) $sinx = \frac{2}{3} \ \wedge\ tgx = \frac{1}{3}$
    c) $2sin^2x - 1 = 1$
    d) $3cosx - 2 = -6$
    e) $sinx = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \ \wedge\ cosx = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$

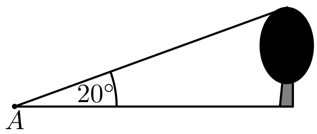
12. Oblicz wartość wyrażenia:
a) $\left(\frac{tg19°}{ctg71°}+\frac{ctg23°}{tg67°}\right)^{-1}$
b) $3-\sqrt{2}sin^2 13°+tg41°tg49°-\sqrt{2}cos^2 13°$

13. Pewnego dnia poziom wody y (w metrach) na ławicy piaskowej u wejścia do portu wyrażał się wzorem: $y=14+10sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)$, gdzie t oznacza liczbę godzin jaka upłynęła od godziny $12^{\underline{00}}$.
Oblicz poziom wody o godzine $14^{\underline{00}}$, $15^{\underline{00}}$, $16^{\underline{00}}$. O której godzinie tego dnia woda osiągnie najwyższy poziom?

14. Wierzchołek latarni morskiej znajduje się 30 metrów nad poziomem morza. W kierunku latarni płynie ponton, z którego widać wierzchołek latarni pod kątem $10°$. Po pewnym czasie ponton zbliżył się do latarni tak, że jej wierzchołek widać pod kątem $35°$. Jaką odległość przebył ponton w tym czasie?

15. Punkt A jest odległy od podstawy drzewa o 40 metrów. Oblicz wysokość drzewa korzystając z tabeli wartości funkcji trygonometrycznych kąta $20°$.

$sin20°$	$cos20°$	$tg20°$	$ctg20°$
$0,342$	$0,940$	$0,364$	$2,747$



Wynik zaokrąglij z dokładnością do $0,1$ metra.

16. Naszkicuj wykres funkcji f i odczytaj z niego jego miejsca zerowe i zbiór wrtości:
a) $f(x)=sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$
b) $f(x)=sinx+2$
c) $f(x)=cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$
d) $f(x)=cosx-1$
e) $f(x)=tg\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$
f) $f(x)=tgx+1$
g) $f(x)=ctg\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

17. Na podstawie wykresu funkcji f wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji w podanym przedziale oraz odczytaj przedziały monotoniczności:
a) $f(x)=cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1 \ \wedge \ x\in\langle 0,\pi\rangle$
b) $f(x)=sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \ \wedge \ x\in\langle 0,\pi\rangle$
c) $f(x)=1+tg\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \ \wedge \ x\in\langle\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi\rangle$

18. W przedziale $(0,\pi)$ narysuj wykres funkcji $y=ctgx$.
a) Ustaw rosnąco liczby: $ctg\frac{3\pi}{7}$, $ctg\frac{\pi}{5}$, $ctg\frac{\pi}{3}$, $ctg\frac{\pi}{12}$.
b) Zaznacz na osi OX te argumenty, dla których $ctgx<1$.

19. Dla każdego α, dla którego $sin\alpha\neq 0$ prawdziwy jest wzór $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{1-cos\alpha}{sin\alpha}$. Korzystając z powyższego wzoru oblicz $tg\frac{\pi}{12}$.

20. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{sinx+cosx}{2sinx-3cosx}$, dla $tgx=2$.

21. Sprawdź, czy podana równość jest tożsamością trygonometryczną:
a) $1-(cos\alpha-sin\alpha)^2=2sin\alpha cos\alpha$
b) $\frac{cos^2\alpha}{1-sin^2\alpha}=\left(\frac{sin^2\alpha}{1-cos^2\alpha}\right)^{-1}$
c) $\left(\frac{1}{tg\alpha}+\frac{1}{ctg\alpha}+\frac{1}{sin\alpha}\right)(1-cos\alpha)=tg\alpha$ dla $\alpha\neq\frac{k\pi}{2}$, gdzie $k\in\mathbb{C}$
d) $cos\alpha\sqrt{1+tg^2\alpha}=-1$ dla $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right)$
e) $\frac{cos\alpha}{1-sin\alpha}=\frac{1+sin\alpha}{cos\alpha}$, dla $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, gdzie $k\in\mathbb{C}$.

22. Rozwiąż równanie:
a) $cos3x=sin\frac{5}{6}\pi$
b) $tgx=sinx$, gdy $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$
c) $\sqrt{3}tg\left(\frac{\pi}{2}x\right)=1$
d) $ctgx=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, gdzie $x\in(-\pi,0)$
e) $cosx=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

23. **a)** Wyznacz wszystkie liczby z przedziału $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, które spełniają nierówność $tgx > -1$.
b) Rozwiąż nierówność $cosx \leqslant 0,5$ w przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$.
c) Odczytaj z wykresu funkcji, dla jakich wartości argumentu $x \in \langle 0, 2\pi\rangle$ spełniona jest nierówność $sinx > -\frac{1}{2}$.
d) Rozwiąż nierówność $ctgx \geqslant 1$.

24. (R) Dla jakich wartości parametru:
a) m równanie $3cosx - 2 = m$ ma rozwiązanie;
b) a istnieje rozwiązanie równania $sinx = 2a - 3$;
c) uzasadnij, że $sin2 < 2sin1$.

25. (R) Ustal znak liczby $ctg(cos\frac{3}{10})$. Odpowiedź uzasadnij.

26. (R) **a)** Oblicz wartość wyrażenia $sin2x$, jeśli $ctgx = 5 \ \wedge \ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
b) Sprawdź, czy $ctg10° - ctg20° = \frac{1}{sin20°}$.
c) Na podstawie wzoru: $sin(\alpha + \beta) = sin\alpha cos\beta + sin\beta cos\alpha$, oblicz: $sin75°$.
d) Oblicz $sin\alpha + cos\alpha$, gdy $sin\alpha \cdot cos\alpha = 0,5$.

27. (R) Dana jest funkcja f o wzorze $f(x) = cos2x + 4cosx + 3$.
a) Oblicz $f(\pi)$.
b) Wyznacz zbiór miejsc zerowych funkcji f.

28. (R) Oblicz $cos2x$ wiedząc, że $cosx = \frac{1}{4}(\sqrt{2} + \sqrt{6})$.

29. (R) Dana jest funkcja f o wzorze $f(x) = sinx - cos2x$.
a) Oblicz wartość $f(x)$ dla $x = \frac{\pi}{2}$.
b) Wykaż, że $f(x) = (sinx + 1)(2sinx - 1)$.
c) Rozwiąż równanie $\frac{f(x)}{sin2x} = 0$.

30. (R) Wykorzystując tożsamość: $sin3\alpha = 3sin\alpha - 4sin^3\alpha$ wykaż, że $sin10°$ jest rozwiązaniem równania: $8x^3 - 6x + 1 = 0$.

31. (R) **a)** Naszkicuj dla $x \in \langle -\pi, \pi\rangle$ wykres funkcji $y = |cosx|$.
b) Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = -2sinxcosx$ dla $x \in (-\pi, \pi)$, podaj jej miejsca zerowe i przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości dodatnie.
c) Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x) = |1 - tgx|$.

32. (R) Wyznacz okres zasadniczy funkcji i sporządź jej wykres $g(x) = sinx + cosx$.

33. (R) Wyznacz największą ujemną liczbę spełniającą równanie $cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.

34. (R) Zbiór A jest zbiorem rozwiązań równania $cos3x = cosx$ w zbiorze liczb rzeczywistych, zaś B zbiorem rozwiązań równania $sin4x = 0$ w przedziale $x \in \langle 0, 2\pi\rangle$. Wyznacz iloczyn zbiorów A i B.

35. (R) **a)** Rozwiąż równanie: $1 + cos2x = cosx$.
b) Podaj współrzędne punktów przecięcia się wykresów funkcji $y = sinx$ i $y = cos2x$ w przedziale $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$.
c) Rozwiąż równanie: $sin\left|\frac{\pi}{2}x\right| = 1$.
d) Rozwiąż równanie: $1 - tgx + tg^2x - tg^3x + ... = \frac{\sqrt{2}cosx}{2sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}$ w przedziale $\langle 0, \pi\rangle$.
e) Rozwiąż równanie $2cos^2x = sinx - 1$.

36. (R) Oblicz sumę wszystkich rozwiązań równania $sin^4x + cos^4x = \frac{5}{8}$ należących do przedziału $\langle -\frac{\pi}{2}; \pi\rangle$.

37. (R) Rozwiąż równanie $\frac{1}{sinx} = \frac{1}{sin4x}$ w przedziale $\langle -\pi, \pi\rangle$.

38. (R) Rozwiąż nierówności:
   a) $sin2x + sin^2 2x + sin^3 2x + ... > \frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$
   b) $4sinxcosx \leqslant 1$ dla $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$
   c) $ctg^2 x \geqslant 3$
   d) $|4cosx - 1| > 1$

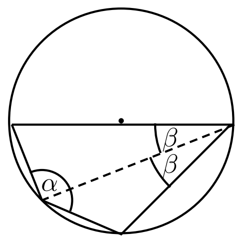
39. (R) Oblicz sumę wszystkich pierwiastków równania $sin3x = ctg\frac{25}{2}\pi$, które spełniają nierówność $|x - 5\pi| \leqslant 5\pi$.

40. (R) W trójkącie ostrokątnym ABC dane są: $|AB| = 16$, $|CB| = 14$ i $|\sphericalangle BAC| = 60°$. Oblicz długość boku $|AC|$ oraz długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.

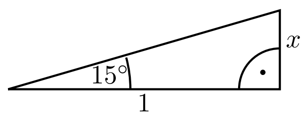
41. (R) Dwa krótsze boki trójkąta rozwartokątnego mają długość 5 cm i 6 cm. Jakie wartości może przyjmować długość trzeciego boku trójkąta?

42. (R) Czworokąt jest wpisany w okrąg. Udowodnij, że dla kątów α i β pokazanych na rysunku, zachodzi związek

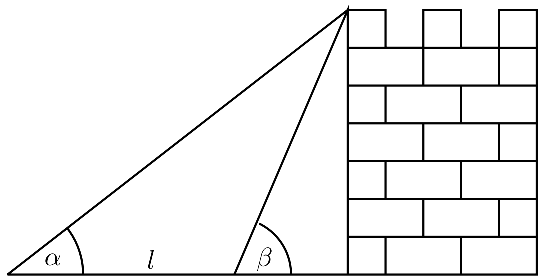
$$2sin^2\beta - ctg\alpha sin2\beta = 1.$$



43. (R) Oblicz x (patrz rysunek).



44. (R) Wysokość wieży przedstawionej na rysunku można obliczyć zgodnie ze wzorem $h = l \cdot \frac{tg\alpha \cdot tg\beta}{tg\beta - tg\alpha}$. Uzasadnij powyższy wzór.



45. (R) Wyznacz pochodną funkcji $y = \frac{x}{1-cosx}$.

46. (R) Zbadaj monotoniczność funkcji określonej wzorem $f(x) = 5x + cos4x$.

47. (R) Zbadaj, czy istnieje styczna do krzywej o równaniu $y = \frac{1}{4}sin2x$ równoległa do prostej o równaniu $y = -x$.

48. (R) Wyznacz współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji $f(x) = cos^2 2x$ w punkcie $M = (x_0, f(x_0))$ jeśli $x_0 = \frac{3}{8}\pi$.