

1 Zastosowania matematyki

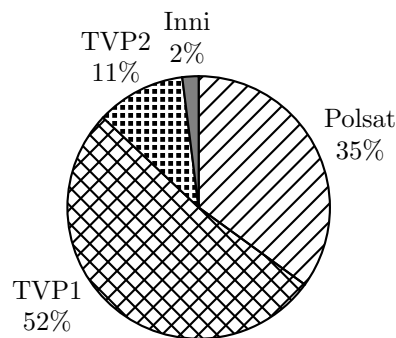
- 1.1. Na mapie w skali 1:8 000 000 odległość między Lublinem a Szczecinem jest równa 8,5 cm. Oblicz odległość pomiędzy miastami.
- 1.2. Cena 1 kWh energii elektrycznej wynosi 46 gr. Ile kosztuje ogrzewanie mieszkania przez tydzień dwoma grzejnikami o mocy 1,5 kW. Każdy grzejnik pracuje 5 godzin na dobę.

- 1.3. Wiadro wisi przywiązane do łańcucha nawiniętego na wałek kołowrotu, tak jak przedstawiono na rysunku. Aby wiadro dotknęło lustra wody należy wykonać 14 pełnych obrotów korbą. Oblicz, odległość lustra wody od brzegu studni, gdy wiadomo, że wałek kołowrotu ma średnicę 20 cm. Wynik podaj w zaokrągleniu do 1 m.

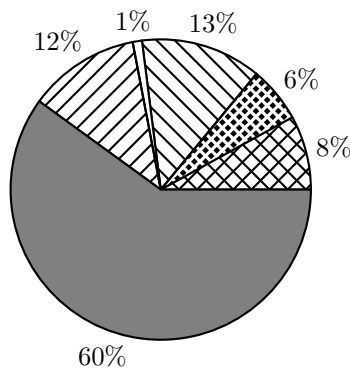


- 1.4. Gdyby mąż oszczędzał miesięcznie jednakową kwotę, to po 20 miesiącach suma zaoszczędzonych pieniędzy byłaby równa cenie samochodu Renault Megane. Gdyby żona oszczędzała miesięcznie jednakową kwotę, to po 80 miesiącach zaoszczędziłaby tę samą sumę co mąż. Po ilu miesiącach zbiorą oni tę samą sumę oszczędzając razem ?
- 1.5. Świeżo skoszona trawa zawiera 60% wody, a wysuszone siano tylko 15% wody. Oblicz, ile kilogramów wysuszonego siana można otrzymać z 1 tony świeżo skoszonej trawy? Wynik podaj w zaokrągleniu do pełnych kilogramów.
- 1.6. a) Ile kilogramów wody należy dolać do 0,5 kg 30% roztworu soli, aby otrzymać roztwór 5%.
b) W jakim stosunku należy mieszać roztwór cukru o stężeniu 10% z roztworem cukru o stężeniu 16% aby otrzymać roztwór cukru o stężeniu 12%?
c) Ania i Zosia kupiły pewną ilość pomarańczy. Ania zrobiła sok z 30%, a Zosia z 25% zakupionych owoców. O ile procent więcej soku zrobiła Ania ?

- 1.7. Obok, na wykresie kołowym, przedstawiono procentowy udział stacji telewizyjnych w zyskach z reklam w 1999 roku. Wiedząc, że w 1999 roku cały zysk z reklam wyniósł 2 miliardy złotych, oblicz o ile więcej pieniędzy uzyskała telewizja Polsat niż TVP2.



- 1.8. W roku 1999 świat liczył 5978 mln mieszkańców. Wykres kołowy przedstawia, jaki procent w tej liczbie stanowią mieszkańcy poszczególnych kontynentów.

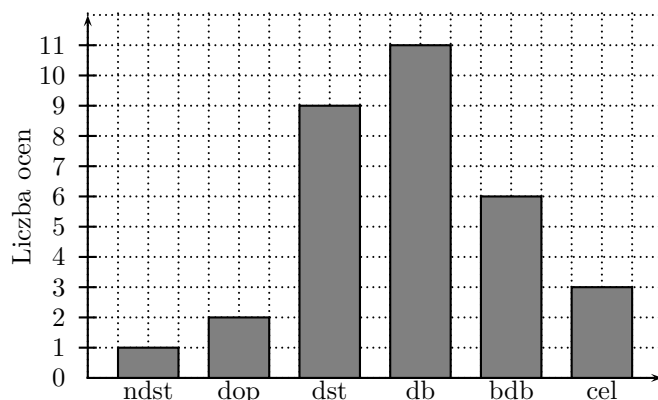


-  Ameryka Północna i Środkowa
-  Ameryka Południowa
-  Afryka
-  Oceania
-  Europa
-  Azja

- c) Od 1 maja 2004 roku w krajach Unii Europejskiej mieszkać będzie około 500 milionów ludzi. Jakim procentem wszystkich mieszkańców Ziemi, których jest obecnie 6 mld, są obywatele Unii Europejskiej? Wynik zaokrąglaj do 1%.

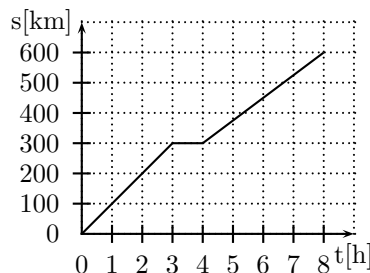
1.9. Histogram przedstawia rozkład ocen końcowo-rocznych z matematyki w pewnej klasie.

- a) Oblicz średnią arytmetyczną ocen z matematyki w tej klasie.
b) Jaki procent uczniów uzyskał ocenę z matematyki wyższą niż średnia klasy?



1.10. Dany jest wykres drogi jaką przejechał kierowca pewnego samochodu w ciągu 8 godzin.

- a) Jaką drogę pokonał kierowca w ciągu drugiej godziny jazdy?
b) Jaka była średnia prędkość na całej trasie?
c) Jak długo jechał kierowca z prędkością $75 \frac{km}{h}$?



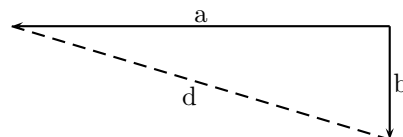
1.11. Pewna pompa pompuje $20 m^3$ wody w 2 godziny i 40 minut.

- a) Ile czasu potrzeba, by ta pompa wypompowała $100 m^3$ wody?
b) Ile wody wypompuje ta pompa w ciągu 1 godziny i 15 minut?

1.12. Średnia płaca w pewnym starostwie zatrudniającym 50 pracowników wynosiła 2000 zł. Po zatrudnieniu nowego pracownika stażysty średnia miesięczna płaca spadła o 1%. Oblicz płacę nowego pracownika.

1.13. W pewnym zakładzie każdy z dziesięciu pracowników wykonuje w ciągu jednej zmiany średnio 2700 detali. Po zatrudnieniu nowego pracownika średnia wykonywanych detali w ciągu zmiany spadła o 4%. Oblicz, ile detali wykonuje w ciągu zmiany nowozatrudniony pracownik?

1.14. Dwa statki wypływają z portu w tym samym momencie. Jeden z nich płynie na zachód z prędkością 17 mil na godzinę, a drugi na południe z prędkością 12 mil na godzinę. Jeśli t oznacza czas w godzinach od momentu wypłynięcia statków z portu, to wyraż odległość d między statkami w dowolnym momencie jako funkcję czasu t .



1.15. W mieście działają dwie firmy taksówkowe A i B. Za przejazd taksówką firmy A pobierana jest opłata opisana wzorem: $A(x) = 4 + 1,6x$, natomiast za przejazd taksówką firmy B wzorem: $B(x) = 3,2 + 1,7x$, przy czym x oznacza liczbę przejechanych kilometrów. Dla jakich wartości x długości trasy przejazdu, opłata za przejazd taksówką firmy A jest niższa od opłaty za przejazd taksówką firmy B?

1.16. Przemieszczanie s (w metrach) pewnego ciała jest funkcją czasu t (w sekundach) opisaną wzorem: $s(t) = t^2 + 6t + 10$. Oblicz średnią prędkość tego ciała w czasie $t \in \langle 4, 7 \rangle$.

1.17. Z drutu miedzianego o długości 11 metrów odcięto kawałek, którego długość zmierzona w centymetrach jest równa długości pozostałej części drutu mierzonego w decymetrach. Oblicz długość odciętego kawałka drutu.

1.18. Dwie konkurencyjne firmy „Alfa” i „Beta” chcą podjąć się organizacji wycieczki. Opłata za wycieczkę w przypadku każdej z ofert składa się z części stałej, niezależnej od liczebności grupy oraz stawki za każdego uczestnika. Opłata stała i stawka wynoszą odpowiednio 3000 zł i 245 zł w firmie „Alfa” oraz 4400 zł i 206 zł w firmie „Beta”. Oblicz:

- a) przy jakiej liczbie uczestników wycieczki korzystniejsza jest oferta firmy „Alfa”,
b) jakie koszty przypadną na każdego z 38 uczestników wycieczki zorganizowanej przez firmę „Beta” (koszty podaj z dokładnością do 1 zł).

1.19. Pewna firma telekomunikacyjna proponuje abonentowi do wyboru dwa warianty opłat miesięcznych za telefon.

I - za każdy impuls 20 groszy i jednocześnie brak opłaty stałej.

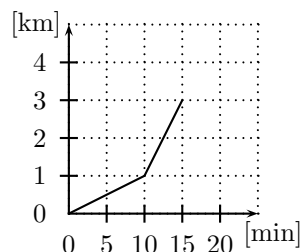
II - za każdy impuls 8 groszy i jednocześnie opłatę stałą w wysokości 12 zł.

a) Dla każdej z możliwości zapisz w postaci wzoru zależność między miesięczną opłatą za telefon a liczbą wykorzystywanych w miesiącu impulsów.

b) Którą z możliwości należy wybrać, jeżeli zakładamy, że miesięcznie wykorzystuje się 120 impulsów?

c) Oblicz, przy jakiej liczbie impulsów wykorzystywanych w ciągu miesiąca wybór pomiędzy podanymi wariantami nie ma znaczenia.

1.20. (R) Bogdan pierwszą część drogi do szkoły szedł, a drugą biegł (patrz wykres). Oblicz z jaką prędkością szedł, a z jaką biegł i jaka była jego średnia prędkość na całej trasie. Wyniki podaj w kilometrach na godzinę.



1.21. (R) Pociąg o długości 500 m jadący ze stałą prędkością $48 \frac{km}{h}$ przejeżdża przez tunel. Od momentu wjazdu lokomotywy do tunelu do momentu opuszczenia go przez ostatni wagon pociągu upływa 2,5 minuty. Oblicz długość tunelu.

1.22. (R) Z dwóch miejscowości A i B ruszają naprzeciw siebie dwaj piechurzy. Pierwszy z nich pokonał trasę z miejscowości A do B i nie zatrzymując się wrócił do miasta A. Drugi pokonał tę samą drogę, co pierwszy, tyle, że ruszył z miasta B, doszedł do miasta A i nie zatrzymując się wrócił do miasta B. Piechurzy minęli się po raz pierwszy w odległości 4 km od miasta A, a po raz drugi w odległości 2 km od miasta B. Oblicz odległość między miastami A i B.

2 Liczby rzeczywiste

2.1. Niech $a = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11^5$ i $b = 4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^4$

a) Wyznacz $NWW(a, b)$ i $NWD(a, b)$.

b) Oblicz $\frac{NWW(a, b)}{NWD(a, b)}$.

c) Wykaż, że $NWW(a, b) \cdot NWD(a, b) = a \cdot b$.

2.2. Rozłóż liczby a i b na czynniki pierwsze, a następnie wyznacz $NWW(a, b)$ i $NWD(a, b)$, gdy

a) $a = 429$, $b = 143$

b) $a = 105$, $b = 187$

c) $a = 24$, $b = 60$

2.3. Wykonaj działania:

a) $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{81}$

b) $\frac{1}{1 + \sqrt[3]{3}}$

c) dla $a = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$ i $b = \sqrt{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$, oblicz $a \cdot b$, $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$, $(a - b)^2$, $\frac{1}{a^2} + b^2$

d) $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} + \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$

2.4. Oblicz, jaki procent liczby x stanowi liczba y , gdy $x = \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{\sqrt{144}}\right) : (2^{-2} - 3 \cdot 2^{-4})$, $y = \frac{3^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{3}}$.

2.5. Kibic obserwując zawody lekkoatletyczne oszacował długość rzutu młotem na 78 m 40 cm, a okazało się, że młociarz rzucił młot na odległość 77 m 76 cm. Długość skoku trójskoczka kibic ocenił na 17 m i 20 cm, natomiast rezultat jaki po chwili ukazał się na tablicy wyników to 17,36 m. W którym przypadku kibic popełnił większy błąd względny?

2.6. Dane są liczby: $a = \frac{(-3) \cdot \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} - 4\frac{3}{8}\right)}{2}$ oraz $b = \left(\frac{13}{16} - (-0,3)\right) \cdot \left(\frac{25}{16}\right)^{\frac{1}{2}}$.

a) Oblicz wartości dokładne oraz wartości przybliżone obu liczb w zaokrągleniu do 0,01.

b) Wyznacz błąd względny i bezwzględny przybliżenia liczby a .

2.7. Dane są wyrażenia arytmetyczne: $m = \frac{\binom{5}{3}}{\frac{5}{3}}$ i $n = \frac{2^{-2} \cdot (0,5)^{-5}}{64^{\frac{1}{6}}}$

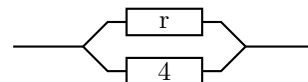
a) Oblicz wartość wyrażeń m i n .

b) Dobierz liczbę k tak, by (m, n, k) były kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.

2.8. Dwa oporniki o oporach: jeden r omów, a drugi 4 omy połączone równolegle (patrz rysunek). Opór R układu tak połączonych oporników, można wyznaczyć ze wzoru $\frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \frac{1}{4}$, $r > 0$.

a) Wyznacz R w zależności od r .

b) Uzasadnij, że dla każdego $r > 0$ musi być spełniony warunek $R < 4$.



2.9. W pewnej firmie zakupiono dwie drukarki. Pierwsza kosztowała 1000 zł, a druga 1200 zł. Okazało się, że jeden wydruk uzyskany z pierwszej drukarki kosztuje 5 gr a z drugiej 4 gr. Dla jakich x całkowity koszt (łącznie z ceną zakupu) wykonania x wydruków na pierwszej drukarce będzie bardziej opłacalny, niż całkowity koszt wykonania x wydruków na drugiej z nich?

2.10. Wyznacz ułamek o mianowniku 250, który jest większy od 0, (8) i jednocześnie mniejszy od $\frac{23}{25}$.

2.11. Zamień liczbę $1,24(36)$ na ułamek zwykły.

2.12. Wykorzystując równość: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, oblicz sumę $\frac{1}{10 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 12} + \frac{1}{12 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100}$.

2.13. Sprawdź, czy liczby $a = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$ i $b = 2,5(9)$ należą do zbioru rozwiązań nierówności $\frac{8}{x} \geq 3$.

2.14. Klient złożył w banku A 5000 zł na okres 2 lat z oprocentowaniem rocznym 5% i roczną kapitalizacją odsetek. Okazało się później, że gdyby tę samą kwotę złożył w banku B, to po dwóch latach miałby o 343 zł więcej. Oblicz jakie oprocentowanie oferował bank B, jeśli kapitalizacja wkładów odbywała się w nim co pół roku.

2.15. Cena płaszcza kolejno malała najpierw o 20%, a następnie o 30% i wtedy kosztował on 700 złotych. Jaka była cena płaszcza przed obniżkami?

2.16. Jeden z boków prostokąta zmniejszono o 40%, a drugi zwiększono o 50%. O ile procent zmieniło się pole prostokąta?

2.17. W 1995 roku zbiory kawy na świecie wynosiły 5489 tys. ton, a w roku 2001 - 7300 tys. ton. W Wietnamie zebrano w 1995 roku 4%, a w 2001 roku 12,3% światowego zbioru kawy. O ile punktów procentowych zbiory kawy w Wietnamie były większe w 2001 roku w porównaniu z 1995 rokiem. O ile procent wzrosły zbiory kawy w Wietnamie w 2001 roku w porównaniu z rokiem 1995?

2.18. (R) Na budowę domu można zaciągnąć pożyczkę w wysokości 63450 euro. Do wyboru są dwa warianty spłaty:

I - w każdym miesiącu spłacasz równe raty każdą w wysokości 2% pożyczonej kwoty.

II - pierwsza rata miesięczna wynosi 2500 euro, każda następna jest o 50 euro mniejsza niż poprzednia.

a) Ile miesięcy potrwa spłata mieszkania w każdym z wariantów?

b) Oblicz, ile wynosi ostatnia rata spłaty w każdym z wariantów.

c) Oblicz, od którego miesiąca rata spłacana według wariantu II będzie niższa niż w przypadku wariantu I.

2.19. (R) Liczbą palindromiczną nazywamy liczbę naturalną, która czytana z prawej do lewej lub z lewej do prawej strony daje tę samą liczbę np.: 5225. Udowodnij, że liczba czterocyfrowa palindromiczna jest podzielna przez 11.

2.20. (R) Bank przyjął kwotę 50000 zł na 5% rocznie z roczną kapitalizacją odsetek i pożyczył ją na 6% rocznie z tą samą kapitalizacją. Ile zyskał bank w ciągu pięciu lat, a ile zyskał w ciągu dziesięciu lat?

2.21. (R) Dane są liczby: $\sqrt{6} - \sqrt{5}$, $\sqrt{6} + \sqrt{5}$, $\frac{5-2\sqrt{5}}{5}$, $\frac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$. Zbadaj, czy wśród tych liczb jest para liczb przeciwnych i czy jest wśród nich para liczb odwrotnych.

2.22. (R)

- a) Oblicz $\frac{1}{1-\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}-\sqrt{100}}$.
- b) Oblicz $a^4 + b^4$, gdy $a^2 + b^2 = 9$ oraz $a + b = 1$.
- c) Wykaż, że jeśli $x + y + z = 0$, to $xy + yz + zx \leq 0$.
- d) Wykaż, że jeśli $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$ i $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n \neq 0$ to $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n} = \frac{a_1}{b_1}$.

3 Logika i zbiory

3.1. Oceń wartość logiczną zdania (jeżeli jest ono zdaniem logicznym):

- a) Gdynia jest miastem portowym.
- b) 7 jest liczbą szczęśliwą.
- c) Co masz zrobić jutro zrób dzisiaj.
- d) Liczba 7 i jej kwadrat powiększony o 4 są liczbami pierwszymi.
- e) Istnieje kwadrat, którego przekątna jest równa połowie obwodu lub istnieje kwadrat o polu $\sqrt{2}$.
- f) Pole trójkąta równobocznego o boku 1 jest mniejsze od pola rombu o boku 1 lub jest większe od pola kwadratu o boku 1.
- g) p: $6|3506$, q: $\sqrt{4\frac{4}{9}} \in \mathbb{W}$, r: liczba naturalna n , która przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2 ma postać $n = 3k + 2$ dla pewnej liczby naturalnej k .
- Oceń wartość logiczną zdań $(p \vee r) \wedge q$.
- h) Kilimandżaro jest największą górą Afryki wtedy i tylko wtedy, gdy struś jest największym ptakiem.
- i) Jeżeli trójkąt jest równoboczny, to ma dwa boki równe.
- j) Jeżeli Poznań leży nad Odrą, to jest stolicą Wielkopolski.

3.2. Podane wyrażenie poprzedź kwantyfikatorem, aby otrzymać zdanie prawdziwe:

- a) $\sqrt{x^2} = |x|$
- b) $6|n(n+1)(n+2)$
- c) $\frac{x^2-1}{x+1} = 3$
- d) liczba x jest jednocześnie liczbą pierwszą i liczbą parzystą.

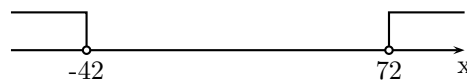
3.3. Zbiór A ma 12 elementów, zbiór B ma 9 elementów, zbiór $A \cup B$ ma 17 elementów. Ile elementów należy do zbioru $A \setminus B$.

3.4. Wykonaj działania na zbiorach:

- a) $\mathbb{C}, \mathbb{N}$
- b) $\mathbb{W}, \mathbb{NW}$
- c) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
- d) $A = \{x \in \mathbb{N} : 10|x\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : 5|x\}$

3.5. Zbiór A jest zbiorem tych wszystkich liczb rzeczywistych, które spełniają nierówność $|x + 24| \leq 96$, a zbiór B jest przedstawiony na osi liczbowej.

- a) Zapisz zbiór A w postaci przedziału liczbowego.
- b) Opisz zbiór B za pomocą nierówności z wartością bezwzględną.
- c) Wykaż, że liczba 72 należy do zbioru $A \setminus B$.

3.6. Wyznacz wszystkie liczby $x \in \mathbb{R}$, które spełniają nierówność $x^2 < 4x$, ale nie spełniają nierówności $|x + 2| < 3$.3.7. Dane są zbiory: $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x - 5 \leq 0\}$ oraz $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x > 0\}$. Zaznacz na osi liczbowej zbiory A i B oraz wyznacz zbiory $A \cap B$ i $B \setminus A$.

3.8. Wykonaj odpowiednie obliczenia i oceń, które z podanych zdań jest prawdziwe, a które fałszywe:

$$p : -3^2 = 9, \quad q : \sqrt{81 + 64} = 17 \quad r : \sqrt[3]{27^4} = \left(\frac{1}{9}\right)^{-2}.$$

Oceń wartość logiczną zdania: $(p \wedge q) \Rightarrow r$. Odpowiedź uzasadnij.

- 3.9. Zbiór A jest zbiorem rozwiązań nierówności: $-x^2 + 2x + 3 \geq 0$, zbiór B jest dziedziną funkcji wymiernej $W(x) = \frac{x^2-9}{4x-x^2}$. Wyznacz różnicę zbiorów $A \setminus B$.
- 3.10. (R) **a)** Sprawdź, czy następujące wyrażenia są tautologiami:
 $q \Rightarrow (p \vee q)$
 $p \Rightarrow (p \wedge q)$
 $\sim (p \wedge (\sim q)) \Leftrightarrow ((\sim p) \vee q)$
 $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \Rightarrow (p \vee q)$
b) Rozstrzygnij, czy poprawne jest rozumowanie:
 Jeżeli wiesz, że umarłeś to umarłeś i jeżeli wiesz, że umarłeś to nie umarłeś więc nie wiesz, że umarłeś.
- 3.11. (R) Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów, których współrzędne spełniają nierówność:
 $\log_{\frac{1}{2}}(2 - x^2 - y^2) > -1$.
- 3.12. (R) Zbadaj, czy pierwiastki równania $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} - 12 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + 27 = 0$ należą do sumy zbiorów rozwiązań nierówności: $\log_{\frac{1}{3}}(\log_4(x^2 - 5)) > 0$ i $\frac{x+3}{x+5} \leq 5$.
- 3.13. (R) Dane są zbiory $A = \{x; x \in \mathbb{R} \wedge x^5 - 4x^3 - 8x^2 + 32 > 0\}$, $B = \{x; x \in \mathbb{R} \wedge \log_{0,1}(4 - x^2) > \log_{0,1}(6x - 3)\}$. Wyznacz zbiory $A \cap B$, $A \setminus B$.
- 3.14. (R) Zaznacz zbiór wszystkich par (x, y) liczb rzeczywistych, dla których wyrażenie $\sqrt[4]{4 - x^2 - y^2} - \frac{1}{\sqrt{y - \log x}}$ ma wartość rzeczywistą. Zbiór ten przedstaw graficznie na płaszczyźnie XOY.
- 3.15. (R) Wykonaj działania na przedziałach A , B , jeżeli A jest przedziałem, w którym funkcja $f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{x}}$ jest rosnącą, B jest przedziałem będącym dziedziną funkcji $g(x) = \frac{1}{\log x - \log(4-x)}$.
- 3.16. (R) Niech $A = \{(x, y); |x| + |y| \leq 2\}$, $B = \{(x, y); -1 \leq x \leq 1 \wedge 2 \leq y \leq 6\}$. Który z tych zbiorów ma większe pole?
- 3.17. (R) W układzie współrzędnych zaznacz zbiór $A \cap B$, gdy: $A = \{(x, y); x \geq -2 \wedge y \leq 0\}$,
 $B = \{(x, y); y^2 \leq |x + 1|\}$.
- 3.18. (R) W układzie współrzędnych XOY zaznacz iloczyn kartezjański $A \times B$, gdy: $A = \{x; |x| \geq 1\}$
 $B = \{y; |y| \leq 1\}$.

4 „Krok po kroku”

- 4.1. **a)** Podnosząc liczbę dodatnią $3 - \sqrt{5}$ do kwadratu otrzymamy

$$(3 - \sqrt{5})^2 = 14 - 6\sqrt{5}.$$

Stąd otrzymujemy ciekawą równość

$$\sqrt{14 - 6\sqrt{5}} = 3 - \sqrt{5}.$$

Zaproponuj analogiczną równość dotyczącą liczby $\sqrt{11 + 4\sqrt{7}}$. Uzasadnij zaproponowaną równość.

b) Pokażemy, że liczby $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$ i $2 + \sqrt{3}$ są równe, czyli, że $\frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}{2+\sqrt{3}} = 1$.
 Najpierw rozszerzymy ułamek, żeby usunąć niewymierność z mianownika:

$$\frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{(7+4\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^2}}{4-3} = \sqrt{(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})} = \sqrt{49-48} = 1.$$

Pokaż podobnie, że $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 1$.

4.2. Istnieje wygodny sposób szybkiego podnoszenia do kwadratu liczb dwucyfrowych kończących się cyfrą 5:

$$35^2 = 100 \cdot 3 \cdot 4 + 25 = 1225,$$

$$75^2 = 100 \cdot 7 \cdot 8 + 25 = 5625,$$

który wynika z następującego rozumowania:

$$(10a + 5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = 100a(a + 1) + 25.$$

Znajdź sposób szybkiego podnoszenia do kwadratu liczb złożonych z całości i $\frac{1}{2}$ i uzasadnij go. Oblicz w ten sposób $(4\frac{1}{2})^2$ oraz $(9\frac{1}{2})^2$.

4.3. Aby wyznaczyć wszystkie pary (x, y) liczb całkowitych spełniające równanie: $xy = x - y + 3$, można postąpić następująco:

krok 1. Najpierw przekształcamy to równanie do postaci: $(xy - x) + y = 3$

krok 2. Następnie z pierwszego składnika sumy po lewej stronie tego równania, czyli z nawiasu, wyłączamy wspólny czynnik przed nawias a drugi składnik sumy uzupełniamy do wyrażenia, które występuje w nawiasie tak, by równania pozostały równoważne:

$$x(y - 1) + (y - 1) = 3 - 1.$$

krok 3. Lewą stronę otrzymanego równania zapisujemy w postaci iloczynowej przez wyłączenie wspólnego czynnika $(y - 1)$ przed nawias:

$$(y - 1)(x + 1) = 2.$$

krok 4. Ponieważ lewa strona tego równania jest iloczynem dwóch czynników całkowitych, więc jego prawą stronę, czyli liczbę 2 również przedstawiamy w postaci iloczynu dwóch liczb całkowitych:

$$(y - 1)(x + 1) = 2 = 1 \cdot 2 = 2 \cdot 1 = (-1) \cdot (-2) = (-2) \cdot (-1).$$

krok 5. Porównujemy obie strony równania i zapisujemy je w postaci alternatywy czterech układów równań (bo tyle otrzymaliśmy rozkładów liczby 2 w postaci iloczynu liczb całkowitych):

$$[(x + 1)(y - 1) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{cases} x + 1 = 1 \\ y - 1 = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x + 1 = 2 \\ y - 1 = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x + 1 = -1 \\ y - 1 = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x + 1 = -2 \\ y - 1 = -1 \end{cases} \right]$$

krok 6. Rozwiązujemy powyższe układy równań:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases}$$

krok 7. Na koniec wyciągamy wniosek, że jedynymi parami liczb całkowitych spełniającymi wyjściowe równanie są pary liczb: $(0, 3), (1, 2), (-2, -1), (-3, 0)$.

Postępując analogicznie, wyznacz wszystkie pary liczb całkowitych spełniające równanie: $xy = 2x - y + 5$.

4.4. Dany jest algorytm (Euklidesa) obliczania $NWD(a, b)$ i $NWW(a, b)$:

niech $a = 22991$ i $b = 19667$,

$$22991 > 19667$$

$$\Downarrow$$

$$22991 = 1 \cdot 19667 + 3324$$

$$19667 = 5 \cdot 3324 + 3047$$

$$3324 = 1 \cdot 3047 + 277$$

$$3047 = 11 \cdot 277 + 0$$

$$\Downarrow$$

$$NWD(22991, 19667) = 277$$

$$NWW(22991, 19667) = \frac{22991 \cdot 19667}{277} = 1632361.$$

Korzystając z podanego algorytmu oblicz:

$$NWD(1615, 2618) \text{ i } NWW(1615, 2618)$$

4.5. Wiadomo, że wielomian określony wzorem $W(x) = x^4 + 1$ nie ma pierwiastków rzeczywistych, bo dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ wyrażenie $x^4 + 1$ przyjmuje wartości dodatnie. Można go jednak rozłożyć na iloczyn czynników nierozkładalnych stopnia drugiego w następujący sposób:

- najpierw zapisujemy wyrażenie $x^4 + 1$ w postaci sumy kwadratów: $(x^2)^2 + 1^2$;
- następnie uzupełniamy tę sumę do pełnego kwadratu (jak poniżej):

$$(x^2)^2 + 1^2 = (x^2)^2 + 2x^2 + 1^2 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2;$$

- otrzymaną różnicę $(x^2 + 1)^2 - 2x^2$ zapisujemy w postaci różnicy kwadratów:

$$(x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2;$$

- stosujemy wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów:

$$(x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = (x^2 + 1 - \sqrt{2}x)(x^2 + 1 + \sqrt{2}x);$$

- i otrzymujemy rozkład wielomianu $W(x)$ na iloczyn czynników nierozkładalnych:

$$W(x) = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1).$$

- Postępując analogicznie, rozłóż na czynniki nierozkładalne wielomian $Q(x) = x^4 + 9$.

4.6. Sumę kolejnych liczb nieparzystych od 1 do 999, tzn. sumę

$$S = 1 + 3 + \dots + 995 + 997 + 999$$

można obliczyć grupując składniki parami:

$$S = (1 + 999) + (3 + 997) + \dots + (499 + 501),$$

tak, że suma liczb każdej pary wynosi 1000. Par jest 250, bo składników było 500, stąd:

$$S = 250 \cdot 1000 = 250000.$$

Analogicznie oblicz sumę:

$$S = 5 + 10 + \dots + 990 + 995 + 1000.$$

4.7. „Liczba naturalna jest podzielna przez 36, gdy jest podzielna przez 4 i jest podzielna przez 9”. Np. Liczba 187524 jest podzielna przez 36, bo jest podzielna przez 9, gdyż jej suma cyfr $1 + 8 + 7 + 5 + 2 + 4 = 27$ jest podzielna przez 9 oraz jest podzielna przez 4, bo liczba utworzona z dwóch ostatnich cyfr, czyli liczba 24 jest podzielna przez 4.

a) Wykorzystując podaną zasadę podzielności, sprawdź, że liczba 24110352 jest podzielna przez 36.

b) Podaj, jaką cyfrą powinno zastąpić się X , aby liczba 51403X8 była podzielna przez 36.

c) Uzasadnij, że liczby naturalne postaci $10^n + 8$, gdzie n jest liczbą naturalną większą od 1, są podzielne przez 36.

Funkcja i jej własności

mgr A. Piłat, mgr M. Małycha

4.8. Pole trójkąta o wierzchołkach $A = (1, 2)$, $B = (3, 0)$, $C = (2, 4)$ można obliczyć stosując następującą metodę:

- zaznaczamy w układzie współrzędnych punkty ABC ;
- rysujemy prostokąt $KLMN$ w sposób przedstawiony na rysunku (odpowiednie boki prostokąta mają być równoległe do osi układu współrzędnych);
- odczytujemy długości odpowiednich odcinków:

$$|KL| = 2, |LM| = 4, |AK| = 2, |MC| = 1, |CN| = 1, |NA| = 2;$$

- obliczamy pole prostokąta: $P_{KLMN} = |KL| \cdot |LM| = 2 \cdot 4 = 8$;
- obliczmy pola odpowiednich trójkątów prostokątnych:

$$P_{\triangle AKL} = \frac{1}{2}|AK| \cdot |KL| = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$$

$$P_{\triangle LMC} = \frac{1}{2}|LM| \cdot |MC| = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 = 2$$

$$P_{\triangle CNA} = \frac{1}{2}|CN| \cdot |NA| = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$$

- od pola prostokąta odejmujemy sumę pól trójkątów:

$$P_{\triangle ABC} = 8 - (2 + 2 + 1) = 3[j^2].$$

Stosując opisaną wyżej metodę, oblicz pole trójkąta o wierzchołkach

$$A = (1, 0), B = (5, 1), C = (3, 4).$$

4.9. (R) Korzystając z równości $\frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$, można obliczyć następującą granicę:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} \right) &= \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \right) &= \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right) &= 1 \end{aligned}$$

Wykaż równość $\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{n(2n+2)}$, a następnie, korzystając z niej, oblicz granicę:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 6} + \frac{1}{3 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{n \cdot (2n+2)} \right).$$

5 Funkcja i jej własności

5.1. Wyznacz dziedzinę i miejsca zerowe funkcji:

a) $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 + 2x + 4}$

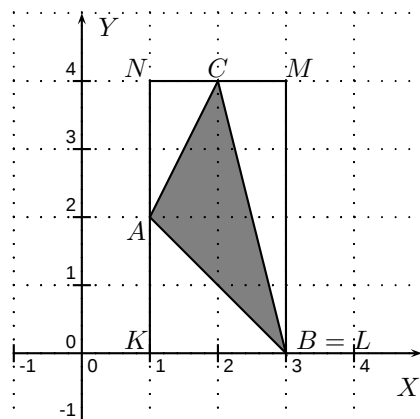
b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x - 6}}$

c) $f(x) = \sqrt{2 - |x|}$

d) $f(x) = \frac{9 - x^2}{3 + x}$

e) $f(x) = \frac{2x^2 + 4}{-x^2 + 4}$

5.2. Wyznacz wzór funkcji $g(x) = f(x - 3) - 1$, gdy $f(x) = x^2$ i sporządź jej wykres.

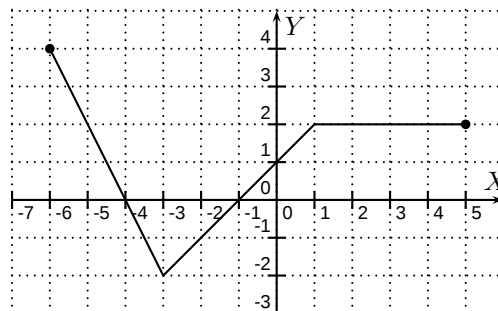


5.3. Opisz sposób, w jaki należy przekształcić wykres funkcji f , aby otrzymać wykres funkcji g , gdy:

- a) $f(x) = \sin 3x \wedge g(x) = \sin(3x + \pi)$
 b) $f(x) = 2x^2 \wedge g(x) = 2x^2 - 12x + 12$

5.4. Na podstawie wykresu funkcji ustal:

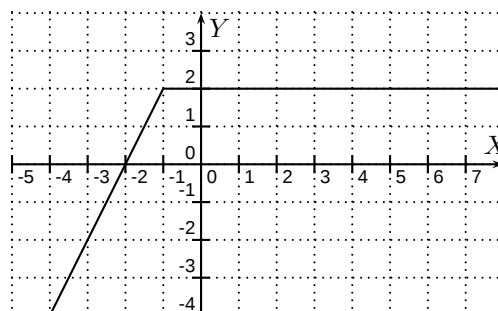
- a) dziedzinę funkcji i jej zbiór wartości,
 b) miejsca zerowe oraz przedziały monotoniczności,
 c) argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie i ujemne.



5.5. (R) Dany jest wykres pewnej funkcji, gdzie $x \in \mathbb{R}$. Sporządź wykres funkcji:

- a) $y = f(x - 2) - 1$,
 b) $y = -f(-x)$,
 c) $y = |f(x)|$.

Opisz przekształcenia jakie wykonałeś.



5.6. (R) Znajdź miejsca zerowe funkcji $f(x) = \frac{\sin 3x - \sin x}{x}$.

5.7. (R) Korzystając z definicji funkcji zbadaj monotoniczność funkcji f o wzorze $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ w zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich.

5.8. (R) Zbadaj na podstawie definicji, czy funkcja f jest różnowartościowa:

- a) $f(x) = 1 - x$
 b) $f(x) = (x - 3)^2 + 1$

5.9. (R) Zbadaj parzystość funkcji f .

- a) $f(x) = x^2 \frac{3^x + 1}{3^x - 1}$
 b) $f(x) = \frac{\cos x}{\operatorname{tg}^2 x}$
 c) $f(x) = \sqrt{x}$
 d) $f(x) = x \log_{3+x} \frac{3-x}{3+x}$
 e) $f(x) = |x| + x$

5.10. (R) Funkcja okresowa f ma okres podstawowy 4. Naskicuj wykres tej funkcji, jeżeli dla $x \in (-2, 0)$ określona jest wzorem $f(x) = \frac{1}{x}$.

5.11. (R) Wskaż przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = x - [x]$, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą z x .

6 Funkcja linowa

6.1. Uzasadnij, że punkty: $A = (-1, 1)$, $B = (1, 5)$ i $C = (1000, 2003)$ należą do jednej prostej.

6.2. Dana jest prosta p o równaniu $y = \frac{2}{3}x - 4$ oraz punkt $A = (4, 3)$.

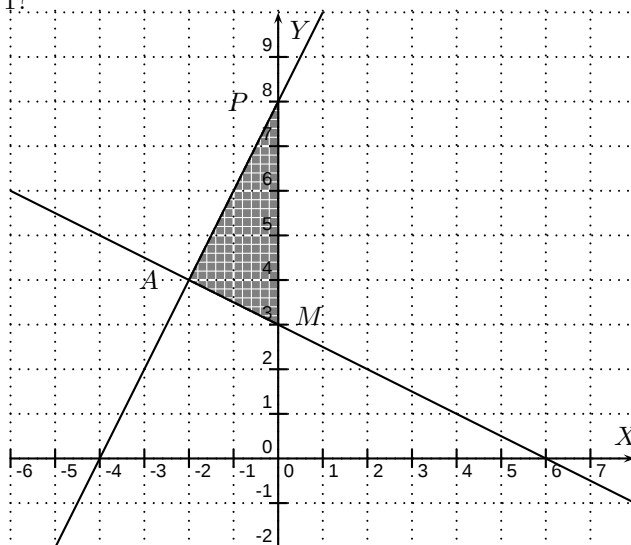
- a) Wyznacz równanie prostej q prostopadłej do prostej p i przechodzącej przez punkt A .
 b) Wyznacz współrzędne punktu, w którym przecinają się proste p i q .
 c) Oblicz pole trójkąta ograniczonego tymi prostymi i osią OY .

- 6.3. Dana jest funkcja f o wzorze $f(x) = -3x + 3$.
- Wyznacz wzór funkcji g , wiedząc, że jej wykres jest równoległy do wykresu funkcji f oraz przechodzi przez punkt $A = (1, 3)$.
 - Wyznacz miejsca zerowe funkcji f i g .
 - W jednym układzie współrzędnych narysuj wykresy funkcji f i g .
 - Oblicz pole figury ograniczonej wykresami funkcji f i g oraz osiami układu współrzędnych.
- 6.4. Liczba 3 jest miejscem zerowym funkcji $y = ax + 3$.
- Wyznacz wzór funkcji.
 - Wykonaj wykres funkcji dla tych x , które spełniają nierówność: $\frac{x+6}{2} + \frac{6-4x}{3} > 0$.
- 6.5. Dana jest funkcja $f(x) = 3x + b, x \in \mathbb{R}$ oraz wiadomo, że $f(x - 2) = 3x - 5$.
- Wyznacz współczynnik b i podaj wzór funkcji f .
 - Narysuj wykres funkcji $g(x) = f(x) + 2$ i oblicz, dla jakich argumentów wartości funkcji g są ujemne.
- 6.6. Punkty $A = (6, -5), B = (-1, 9), C = (-1, 3)$ i $D = (3, -5)$ są wierzchołkami trapezu $ABCD$.
- Wyznacz równania prostych zawierających podstawy tego trapezu.
 - Uzasadnij, że prosta o równaniu $y = \frac{1}{2}x - \frac{13}{2}$ zawiera wysokość trapezu poprowadzoną z wierzchołka D .
- 6.7. Narysuj wykres funkcji f i podaj jej własności:
- $f(x) = -|x + 2| + 1$
 - $f(x) = |4 - 2x|$
- 6.8. Do wykresu pewnej funkcji liniowej należą punkty $A = (4, m^2), B = (5, 9)$. Dla jakich wartości parametru m funkcja jest malejąca, dla jakich rosnąca, a dla jakich stała?
- 6.9. Rozwiąż równania:
- $\sqrt{6z} - \sqrt{3} = \sqrt{12} - \sqrt{3}z$
 - $m - (m - 1)^2 = (m + 1)(-m + 1)$
 - $10 + |1 - x| = 15$
 - $3|t + 1| = |2t + 2|$
- 6.10. Określ liczbę rozwiązań równania z niewiadomą x , gdy:
- $a^2x + 1 = a^2 + ax$
 - $(3 - m)x = 4 + x$
- 6.11. Zebrano 6 kg świeżych grzybów zawierających 90% wody. Ile będą ważyły te grzyby po wysuszeniu, jeśli zawartość wody spadnie do 40%.
- 6.12. Rozwiąż nierówności, rozwiązanie przedstaw na osi liczbowej.
- $\frac{3x-1}{2} - \frac{x+4}{3} \geq \frac{5x-11}{4}$
 - $5x - 2(2(3x - 1) - 3x) > 1 - 6x$
 - $|3x + 6| \leq 9$
 - $2|x| + 2 > |x|$
 - $|4 - \frac{1}{7}x| > \frac{1}{3}$
- 6.13. Rozwiąż układ równań:
- $\begin{cases} -0,1x + 0,2y = 1 \\ 2y = x + 1 \end{cases}$
 - $\begin{cases} 4x(x + 5) - 8x(y + 3) + 4y^2 = 4(x - y)^2 \\ 2x + 3(y + 1) = 2 \end{cases}$
 - $\begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y = 3 \\ y = -\frac{1}{2}x + 6 \end{cases}$
- 6.14. Ojciec polecił synowi rozwiązać 17 zadań i powiedział, że za każde poprawnie rozwiązane zadanie da mu 3 złote, a za każde błędnie rozwiązane zabierze mu 4 złote. Ile zadań syn rozwiązał poprawnie, jeśli od ojca otrzymał tylko 2 złote?
- 6.15. Dwie siostry mają razem 41 lat, a ich mama jest dwa razy starsza od starszej z sióstr. Za pięć lat wszystkie razem będą miały 100 lat. Ile lat mają siostry, a ile ich mama?
- 6.16. W czasie trzech godzin samolot przeleciał z wiatrem drogę długości 1134 km. Lecąc pod wiatr z taką samą prędkością samolot przeleciał w czasie jednej godziny 342 km. Jaka jest prędkość samolotu, a jaka prędkość wiatru?

6.17. W jednym mieście jest pewna liczba centrali telefonicznych połączonych każda z każdą i podobnie w drugim mieście, w którym liczba centrali jest o 3 większa. Oblicz, ile centrali jest w każdym z miast, jeżeli łączna liczba połączeń w obu miastach wynosi 171?

6.18. Oblicz pole figury wyznaczonej przez układ nierówności:
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y + x \leq 5 \\ 2y - x \geq 4. \end{cases}$$

6.19. Opisz za pomocą układu nierówności zbiór punktów trójkąta PAM przedstawionego na rysunku. Uzasadnij, że trójkąt PAM jest prostokątny.



6.20. (R) Rozwiąż równania i nierówności:

- $|x + 2| = 3 - \sqrt{x^2 - 2x + 1}$
- $|3x + 6| - |2x - 2| = x + 8$
- $|m + 3| + |-m + 1| = 5$
- $|2|x| + 3| < 5$
- $|t + 6| + |4t + 4| \geq 1$
- $|3 - k| < |1 - k|$
- $|x^2 - 1| > 1 - x$ - rozwiąż graficznie.

6.21. (R) Wykresem funkcji f jest prosta przechodząca przez punkty $A = (0, 3)$, $B = (-2, 1)$. Wyznacz wzór funkcji f oraz rozwiąż nierówność: $f(|2x + 1|) \leq 13 - 3x$.

6.22. (R) Podaj dla jakiej wartości parametru m proste o równaniach $mx - (2m - 3)y + 3 = 0$, $(2m + 5)x + (m + 6)y - 6 = 0$ są równoległe oraz prostopadłe.

6.23. (R) Trzy miasta A, B, C położone są tak, że długość drogi z A do C przez miasto B jest równa 90 km, z B do A przez C - 61 km, z C do B przez A - 69 km. Oblicz odległości między tymi miastami.

6.24. (R) Rozwiąż układ równań:
$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + y - 5z = -1 \\ 3x - y + 2z = 3 \end{cases}$$

6.25. (R) Rozwiąż układ równań
$$\begin{cases} |x - 2| + 3y = 8 \\ |x| - y = 2 \end{cases}$$

6.26. (R) Zbadaj liczbę rozwiązań układu równań:
$$\begin{cases} (m - 1)x - 2y = m \\ -3x + my = -2 \end{cases}$$
 w zależności od parametru m . Dla $m = 1$ rozwiąż ten układ graficznie.

6.27. (R) Dla jakich wartości parametru m rozwiązaniem układu równań
$$\begin{cases} 3x - 2y = m - 11 \\ x + y = 2m + 3 \end{cases}$$
 jest para liczb:

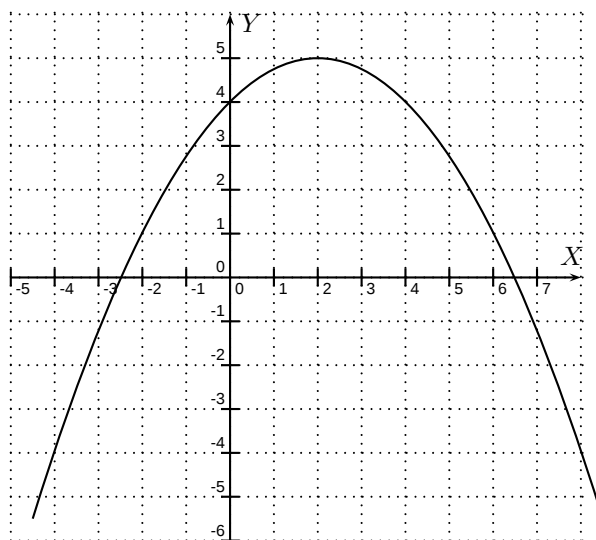
- dodatnich,
- ujemnych,
- o różnych znakach ?

6.28. (R) Narysuj wykres funkcji
$$f(x) = \begin{cases} |x| - 3 & \text{dla } |x| < 4 \\ |x| & \text{dla } |x| \geq 4 \end{cases}$$

Na podstawie wykresu określ własności tej funkcji: monotoniczność, różnowartościowość, parzystość i ciągłość.

7 Funkcja kwadratowa

- 7.1. Wiedząc, że liczba 2 jest miejscem zerowym funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 + bx - 12$, wyznacz współczynnik b oraz drugie miejsce zerowe tej funkcji. Przedstaw wzór funkcji w postaci kanonicznej i iloczynowej.
- 7.2. a) Wyznacz współczynnik b tak, aby przedział $(-8, \infty)$ był zbiorem wartości funkcji $f(x) = x^2 + bx + 1$.
 b) Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = (1 - x)(x + 1) + 2x$. Wyznacz zbiór wartości funkcji f .



- 7.3. Pewna parabola o wierzchołku $W = (2, 5)$ przecina oś w punkcie $A = (0, 4)$. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej, której wykresem jest parabola. Wyznacz miejsca zerowe tej funkcji.

- 7.4. Wyznacz współczynniki b i c trójmianu $y = x^2 + bx + c$, jeśli spełniony jest warunek:
 a) trójmian osiąga najmniejszą wartość równą 7 dla $x = -1$,
 b) trójmian przyjmuje wartości ujemne tylko dla $x \in (-1, 4)$,
 c) wykres trójmianu jest symetryczny względem prostej $x = 3$ i przecina oś OY w punkcie $(0, 5)$.
- 7.5. Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = 2x^2 - 5x + c$, gdzie $c \in \mathbb{R}$.
 a) Wyznacz wszystkie wartości współczynnika c , dla których funkcja nie ma miejsc zerowych.
 b) Wyznacz wszystkie wartości współczynnika c , dla których jednym z pierwiastków jest liczba 1, 5.
 c) Wyznacz wszystkie wartości współczynnika c tak, aby wierzchołek paraboli, która jest wykresem funkcji f , należał do prostej o równaniu $y = -x$.
- 7.6. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji w podanym przedziale:
 a) $f(x) = x^2 - 2x$, $x \in \langle -1, 3 \rangle$,
 b) $f(x) = x^2 + 4x + 4$, $x \in \langle -4, -3 \rangle$.
- 7.7. Funkcja kwadratowa f określona wzorem: $f(x) = ax^2 + bx + c$ ma jedno miejsce zerowe oraz do jej wykresu należą punkty $A = (0, 1)$ i $B = (2, 9)$.
 a) Wyznacz wartości współczynników a , b i c .
 b) Oblicz miejsca zerowe funkcji f .
 c) Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji.
- 7.8. O jaki wektor należy przesunąć wykres funkcji f o wzorze $f(x) = 2x^2$, aby otrzymać wykres funkcji g opisanej wzorem $g(x) = 2(x + 1)^2 - 2x - 4$? Sporządź wykres funkcji g oraz wykres funkcji $h(x) = x - 1$. Na podstawie wykresów odczytaj liczbę rozwiązań równania $g(x) = h(x)$.
- 7.9. W poniższej tabeli przedstawiono 4 argumenty i odpowiadające im wartości pewnej funkcji kwadratowej. Wyznacz wzór tej funkcji.

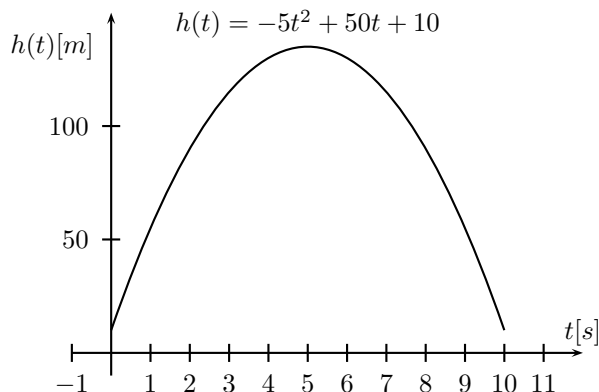
x	-2	0	2	4
y	-6	0	2	0

- 7.10. Zakład „Cukiernik” produkuje torty w kształcie walca w różnych rozmiarach. Ich ceny podaje tabelka:

Średnia podstawy walca d [dm]	4	5	6	8	10
Cena c [zł]	40	60	84	144	220

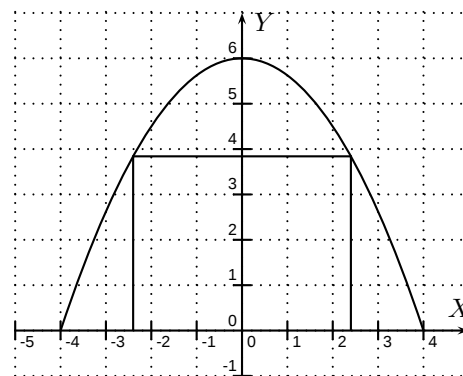
- a) Wyznacz wzór funkcji kwadratowej opisującej zależność między wielkościami c od wielkości d danymi w tabelce.
b) Wyznacz cenę tortu o średnicy 9 dm.

- 7.11. Pocisk wystrzelony pionowo w górę, po osiągnięciu maksymalnego punktu toru, spada w dół. Funkcja $h(t) = -5t^2 + 50t + 10$ przyporządkowuje czasowi t (w sekundach) lotu wysokość h (w metrach), na której znajduje się pocisk. Oblicz maksymalną wysokość, na której znajdował się pocisk.



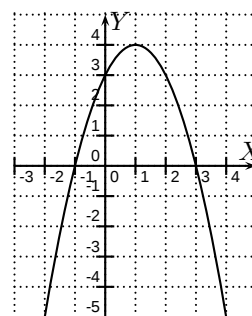
- 7.12. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie dodatniej x różnicę liczb wyrażających pole kwadratu o boku x i długości przekątnej tego kwadratu.
a) Podaj wzór funkcji f i narysuj jej wykres.
b) Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji f w przedziale $\langle \frac{\sqrt{2}}{4}, 2\sqrt{2} \rangle$.
- 7.13. Obwód prostokąta jest równy 24 cm. Jakie powinny być długości boków tego prostokąta, aby walec, który powstanie przez obrót prostokąta wokół jednego z boków, miała jak największe pole powierzchni bocznej?
- 7.14. Wyznacz dziedziny funkcji: $f(x) = \sqrt{(1-x)(3-x)}$ oraz $g(x) = \sqrt{1-x} \cdot \sqrt{3-x}$. Sprawdź, czy te dziedziny są równe.
- 7.15. Funkcja kwadratowa $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ przyjmuje jednakowe wartości dla argumentów 1 i 5. Do wykresu tej funkcji należy początek układu współrzędnych.
a) Wyznacz wartości współczynników b i c .
b) Dla wyznaczonych wartości współczynników b i c naszkicuj wykres funkcji f .
- 7.16. Rozwiąż układy nierówności:
a) $\begin{cases} |x+4| \geq 2 \\ -5(x-1) > x(x-1) \end{cases}$ b) $\begin{cases} (2x+1)^2 - 2x^2 - 10x \geq 5 + (x-1)^2 \\ 2 - \frac{2x+5}{2} < \frac{1-2x}{4} \end{cases}$
- 7.17. a) Jeżeli odejmiemy od danej liczby jej odwrotność, to otrzymamy $\frac{9}{20}$. Jaka to liczba?
b) Kwadrat piątej części stada małąp zmniejszonej o 3 schował się w jaskini. Została na widoku jedna małpa, która weszła na drzewo. Ile było małąp?
c) Znajdź trzy kolejne liczby parzyste tak, aby suma kwadratów dwóch mniejszych liczb była równa kwadratowi trzeciej liczby.
- 7.18. Właściciel sklepu kupuje aparaty fotograficzne płacąc producentowi 100 zł za sztukę i sprzedaje 40 aparatów miesięcznie po 160 zł. Właściciel oszacował, że każda obniżka ceny aparatu o 1 zł zwiększa liczbę sprzedanych aparatów o jedną sztukę. Jaką powinien ustalić cenę, aby jego zysk był największy?
- 7.19. (R) Rozwiąż równania:
a) $x^4 - 3(x^2 - 1) = 7(x^2 - 3)$
b) $\sqrt{x-1} = x-3$
c) $|x| + |1-x^2| = 1$
d) $|x^2 + 4x - 5| + |x^2 + 4x| = 5$.
- 7.20. (R) Rozwiąż nierówność:
a) $5\sqrt{x-3} > x+1$
b) $|4x^2 - 4x + 3| < 2$
c) $(|x|-2)^2 \leq 1$
d) $|x| + |x-2| \geq x^2 - 2x + 1$.

- 7.21. (R) Jednokierunkowa droga o szerokości 8 m prowadzi przez tunel. Przekrój poprzeczny tunelu, przedstawiony na rysunku, ma kształt zbliżony do łuku paraboli o równaniu: $y = -\frac{3}{8}x^2 + 6$. Sprawdź, wykonując odpowiednie obliczenia, czy ciężarówka wioząca prostokątny kontener o szerokości 4,8 m może przejechać tym tunelem, jeżeli najwyższy punkt kontenera znajduje się 4 m nad drogą.



- 7.22. (R) W pewnej klasie było 21 uczniów. Klasa podzieliła się na dwie grupy. Każdy uczeń z okazji zakończenia roku szkolnego podarował upominek wszystkim pozostałym kolegom ze swojej grupy. Jakie liczne były grupy, jeżeli liczba upominków była najmniejsza z możliwych.

- 7.23. (R) Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $f(x) = -x^2 + bx + c$.
- Korzystając z wykresu funkcji wyznacz jej wzór.
 - Wyznacz współrzędne takiego wektora $\vec{u}$, żeby obrazem paraboli w przesunięciu o wektor $\vec{u}$ był wykres funkcji parzystej, której zbiorem wartości jest $(-\infty, -1]$.



- 7.24. (R) Dla jakich wartości parametru a funkcja $f(x) = (a-2)x^2 - 3x + ax + 1$ przyjmuje wartości dodatnie dla każdego $x \in \mathbb{R}$?
- 7.25. (R) Wyznacz wartości parametru a , dla których równanie $ax^2 - (a+2)x + a+2 = 0$ ma różne pierwiastki dodatnie.
- 7.26. (R) Wyznacz takie wartości parametru m , dla których rozwiązania x_1 i x_2 równania $x^2 + 13x - 24 = (10-m)x - 15$, spełniają warunek

$$x_1^2 + x_2^2 = -3x_1x_2.$$

- 7.27. (R) Dane jest równanie $2x^2 - 13x + m = 0$. Wyznacz te wartości parametru m , dla których jeden z pierwiastków jest 2 razy większy od drugiego.
- 7.28. (R) Dla jakich wartości parametru $m \in \mathbb{C}$, pierwiastki funkcji kwadratowej zadanej wzorem $f(x) = x^2 - 3x + m + 1$ spełniają nierówność:

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} > 1?$$

- 7.29. (R) Dla jakich wartości parametru k rozwiązania równania $x^2 - (k+1)x + \frac{6k}{5} = 0$ są równe sinusowi i cosinusowi tego samego kąta?
- 7.30. (R) Dla jakich wartości parametru m równanie: $-x^2 + 4x = m$ ma dwa pierwiastki, z których każdy jest większy od 1.
- 7.31. (R) Jaki prostokąt o obwodzie równym 10 cm ma najkrótszą przekątną.

8 Układy równań i nierówności stopnia drugiego

- 8.1. a) Znajdź współrzędne punktów przecięcia się paraboli i prostej o podanych równaniach: $y = x^2 - 6x + 8$, $y - x = 2$.

b) Wyznacz algebraicznie i graficznie $A \cap B$, gdy $A = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y = x + 2\}$,
 $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0\}$.

c) Ile rozwiązań ma układ równań: $\begin{cases} y = -\frac{1}{x} + 5 \\ y = 5 \end{cases}$

8.2. Wyznacz współrzędne punktów wspólnych prostej $y = 2x + 1$ oraz hiperboli $y = \frac{1}{x}$. Wykonaj ilustrację graficzną.

8.3. Oblicz długości boków prostokąta, którego pole jest równe 25cm^2 , a obwód 25cm .

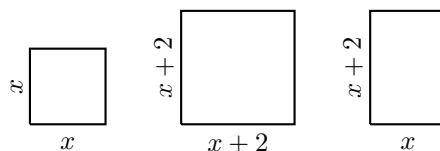
8.4. (R) Rozwiąż algebraicznie i graficznie układy równań:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = x^2 - 13 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 58 \\ xy = -21 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x^2 = 9y^2 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$

8.5. (R) Rozwiąż graficznie układy nierówności:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 \\ x + y > 1 \\ x - y \leq 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} xy \leq 1 \\ x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ y \leq x^2 - 2 \end{cases}$

8.6. (R) Z trzech arkuszy blachy dwa mają kształt kwadratu, a trzeci prostokąta. Długość boku jednego z kwadratów jest o 2 m większa od długości boku drugiego kwadratu. Wymiary prostokąta są odpowiednio równe wymiarom kwadratów. Ile kosztuje jeden metr kwadratowy blachy, jeżeli za pierwsze dwa arkusze w kształcie kwadratów zapłacono łącznie 68 zł, a za trzeci w kształcie prostokąta 30 zł.



8.7. (R) Dla jakich wartości parametru a prosta o równaniu $y = ax$ jest styczna do okręgu opisanego równaniem: $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 1$.

8.8. (R) Wyznacz równanie okręgu o środku $S = (3, 1)$ stycznego do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$.

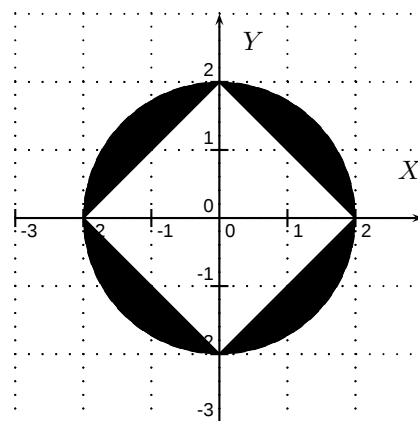
8.9. (R) Rozwiąż układ równań, podaj jego interpretację geometryczną: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0 \end{cases}$

8.10. (R) Dane jest równanie okręgu $x^2 + y^2 = 4$.

a) Ile punktów wspólnych ma ten okrąg z prostą o równaniu $y = 2x - 5$?

b) Dla jakich wartości współczynnika b prosta $y = 2x + b$ i okrąg mają dwa punkty wspólne? Wykonaj ilustrację graficzną.

8.11. (R) Za pomocą układu nierówności opisz zacieniowany na rysunku zbiór punktów.



9 Wielomiany

9.1. a) Sprawdź, czy wielomian $w(x) = 8x^3 - 27$ jest równy wielomianowi $p(x) = (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$.

b) Wyznacz współczynniki a, b wielomianu $w(x) = x^3 - ax^2 - 2x + b$, gdy $w(1) = 3$ i $w(0) = -2$.

c) Rozłóż wielomian na czynniki:

$$p(x) = (2x - 4)^3 - (x - 2)^3$$

$$\begin{aligned}g(x) &= -5x^5 + 30x^4 - 45x^3 \\r(x) &= 2x^3 - 9x^2 + 27 \\z(x) &= x^4 - 3x^3 + 8x - 24\end{aligned}$$

- 9.2. Wykonaj dzielenie wielomianu $w(x) = -3x^4 + 5x^3 + x^2 + 10x + 6$ przez $q(x) = x^2 + 2$ i zapisz go w postaci $w(x) = p(x)q(x) + r(x)$.
- 9.3. W wyniku dzielenia wielomianu $w(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 1$ przez wielomian $p(x)$ otrzymano iloraz $q(x) = x^2 - 3x + 2$ i resztę $r(x) = -1$. Wyznacz wielomian $p(x)$.
- 9.4. Nie wykonując dzielenia wielomianów:
a) wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $w(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ przez wielomian $q(x) = x - \sqrt{2}$.
b) sprawdź, czy wielomian $w(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6$ jest podzielny przez wielomian $p(x) = x^2 - 3x + 2$.
- 9.5. Dla jakich wartości parametru a wielomian $w(x) = a^2x^3 - 4ax + 5$ jest podzielny przez dwumian $q(x) = x + 1$.
- 9.6. Niech $w(x) = 2x^3 - 9x^2 - 38x + 21$.
a) Wykaż, że $(x + 3)$ jest dzielnikiem wielomianu $w(x)$.
b) Wielomian $w(x)$ rozłóż na iloczyn czynników liniowych o współczynnikach całkowitych.
- 9.7. Liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego o ilorazie -2 . Wartość wielomianu $w(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ dla argumentu 2 jest równa 4 .
a) Oblicz $w(-3)$.
b) Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $w(x)$ przez dwumian $x + 1$.
- 9.8. Dany jest wielomian $w(x) = 2x^4 - ax^3 - bx^2 - cx + 3$. Wyznacz współczynniki tego wielomianu wiedząc, że c, a, b są trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego o ilorazie $q = 3$, liczba -1 jest pierwiastkiem tego wielomianu. Rozwiąż $w(x) \leq 0$.
- 9.9. Wiedząc, że liczby $1, 4$ są pierwiastkami wielomianu $w(x) = x^4 + mx^3 + 9x^2 + 38x + n$ znajdź pozostałe pierwiastki i rozwiąż nierówność $w(x) < 0$.
- 9.10. Dany jest wielomian $w(x)$. Wiedząc, że reszta z dzielenia tego wielomianu przez $(x + 1)$ wynosi 2 , przez $(x - 8)$ wynosi -7 , podaj wielomian, który jest resztą z dzielenia $w(x)$ przez $(x + 1)(x - 8)$.
- 9.11. Suma długości wszystkich krawędzi graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 40 cm. Krawędź podstawy ma długość x . Napisz wzór funkcji opisującej objętość tego graniastosłupa w zależności od x . Jakie są wymiary tego graniastosłupa, jeśli jego objętość jest równa 36 cm^3 ?
- 9.12. Wyznacz najmniejszą wartość wyrażenia $x^3 + y^3$ wiedząc, że $x + y = 2$.
- 9.13. Rozwiąż równanie:
a) $x^3 - x = x^2 - 1$
b) $27x^7 = -8x^4$
c) $2x^3 + x^2 - 13x + 6 = 0$
- 9.14. Rozwiąż nierówność:
a) $-3x^2(x + 2)(x^2 + 1)(x + 1)^2 < 0$
b) $x^3 \geq 81x$
c) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 < 0$
- 9.15. Dane są wielomiany: $Q(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 9$, $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$. Oblicz wartości m i n , dla których wielomian $W(x) = x^4 + (m - 4)x^3 - (2n + 6)x^2 - 38x - 3$ równy jest wielomianowi $Q(x) - 2P(x)$.
- 9.16. (R) Pierwiastkiem równania $2x^3 - (3m - 1)x^2 + 7x - m = 0$ jest liczba -1 . Wyznacz wartość parametru m oraz pozostałe pierwiastki tego równania.
- 9.17. (R) Wyznacz wartości parametrów p, q , dla których liczba -1 jest dwukrotnym pierwiastkiem równania $x^3 + px^2 + qx - 2 = 0$.
- 9.18. (R) Wyznacz wszystkie liczby całkowite dodatnie spełniające nierówność: $x^3 + 90 \leq 2(x + 5)^2$.

- 9.19. (R) Rozwiąż nierówność: $x^3 - x^2 + 6|x - 1| \leq 0$.
- 9.20. (R) Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \frac{1}{\sqrt{18x^3 - 3x^2 - 4x + 1}}$.
- 9.21. (R) Funkcja $w(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ osiąga ekstremum $y = -4$ dla $x = 1$. Wyznacz współczynniki a, b, c tej funkcji wiedząc, że do jej wykresu należy punkt $B = (0, -2)$. Rozwiąż nierówność $w(x) \geq 0$.
- 9.22. (R) Dla jakich wartości parametru m wielomian $w(x) = x^3 \log^2 m - 3x^2 \log m - 6x - 2 \log m$ jest podzielny przez $(x + 1)$.
- 9.23. (R) Wiedząc, że $f(x) = x^5 + x^3$ rozwiąż nierówność $f'(2x) + f''(x) \geq 6x$.

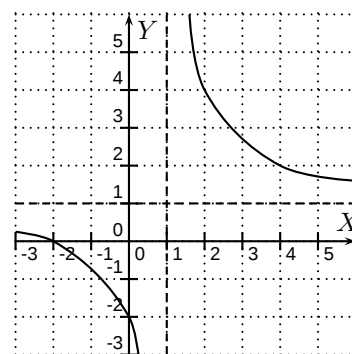
10 Funkcje wymierne

- 10.1. Naskicuj wykres funkcji, wyznacz jej dziedzinę, zbiór wartości, podaj równania asymptot, oblicz miejsca zerowe, określ argument, dla którego funkcja przyjmuje wartości dodatnie, ujemne, podaj przedziały monotoniczności:

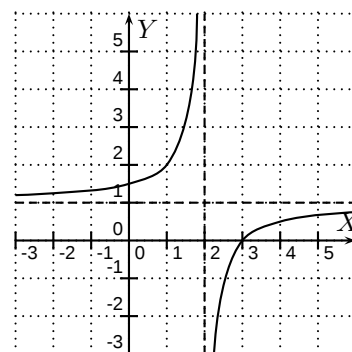
a) $f(x) = 1 - \frac{4}{x+2}$

b) $f(x) = \frac{-3x-6}{x+3}$

- 10.2. W oparciu o wykres funkcji wymiernej określonej wzorem $f(x) = \frac{ax+2}{bx+c}$, wyznacz wartości a, b, c .



- 10.3. Asymptotą pionową wykresu funkcji f o wzorze $f(x) = \frac{ax+b}{x+d}$, jest prosta o równaniu $x = 2$, a asymptotą poziomą prosta $y = 1$. Wyznacz wzór funkcji f .



- 10.4. Wykresy funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ i $g(x) = \frac{1}{k-1}x$ przecinają się w punkcie, którego rzędna równa się $\frac{1}{3}$.
- a) Oblicz odciętą punktu przecięcia wykresów.
- b) Oblicz k .
- c) Dla obliczonego k rozwiąż równanie $\frac{1}{4}f(x) = g(x)$.
- 10.5. Iloczyn liczb x i y jest równy połowie ich sumy. Wyznacz liczbę y jako funkcję liczby x dla $x \neq \frac{1}{2}$.
- 10.6. Odległość między dwiema przystaniami położonymi na rzece wynosi 8 km. Łódka przepływa tę drogę w obie strony w czasie 1 h i 40 minut. Oblicz prędkość łódki na wodzie stojącej, jeśli wiadomo, że prędkość prądu rzeki wynosi $2 \frac{km}{h}$.
- 10.7. Wykonaj działania, określ dziedzinę:
- a) $\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3-8} \cdot \frac{x^2-4}{x^2-2x+1}$
- b) $\frac{x+1}{x-1} : \frac{x^2+x}{3x-3}$
- c) $\frac{x+3}{x-3} + \frac{x-3}{x+3} - \frac{x^2+9}{x^2-9}$
- d) $\left(x - \frac{x-2}{1+2x}\right) : \left(1 + \frac{x(x-2)}{1+2x}\right)$

10.8. Uprość wyrażenie: $\left(\frac{x}{x-y} - \frac{x}{x+y}\right) \frac{x^2+xy}{x^2y^2}$.

10.9. Dane są wyrażenia $u = \frac{3x^2+12x}{(x-1)(x+4)}$ i $w = \frac{x^2-x-2}{x^2+2x+1}$.

a) Wyznacz dziedzinę każdego z nich.

b) Skróć ułamki u i w .

c) Zapisz $u + w$ w postaci ułamka.

10.10. Rozwiąż równanie:

a) $x + \frac{21}{x} = 10$

b) $x + \frac{3}{x-3} = \frac{2x+3}{3-x}$

c) $\frac{x+2}{x} + \frac{x}{x+2} = 2$

d) $1 + \frac{x}{x+2} = \frac{2x^2}{x^2-4}$

10.11. Rozwiąż nierówność:

a) $\frac{3}{x-2} \leq \frac{2}{x+3}$

b) $x \geq \frac{x+1}{1-x}$

c) $\frac{2x-5}{3-4x} > 1$

10.12. Wyznacz wszystkie wartości x spełniające warunek: $-3 < \frac{1}{x} < -\frac{1}{2}$.

10.13. Wyznacz dziedzinę funkcji f określonej wzorem: $f(x) = \sqrt{\frac{x^3-2x^2-x+2}{x+4}}$.

10.14. (R) Uzasadnij, że funkcja $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ przyjmuje dla dodatnich argumentów wartości nie mniejsze od 3.

10.15. (R) Dana jest funkcja określona wzorem $f(x) = \frac{3x-1}{2x+3}$.

a) Wyznacz dziedzinę i miejsca zerowe funkcji f .

b) Rozwiąż nierówność: $f(x) + 1 \leq f(x-3)$.

10.16. (R) Wyznacz asymptoty i osie symetrii wykresu funkcji $y = \frac{2x-4}{x+1}$.

10.17. (R) Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{2|x|+1}{|x|-1}$. Na podstawie wykresu funkcji odczytaj przedziały, w których funkcja ta przyjmuje wartości ujemne.

10.18. (R) Sporządź wykres funkcji określonej wzorem: $y = \left| \frac{2x-1}{x+1} \right|$.

10.19. (R) Sprawdź, czy przekształcenie P płaszczyzny opisane wzorem $P((x, y)) = (y+2, x-1)$, gdzie (x, y) jest dowolnym punktem płaszczyzny, jest izometrią. Wyznacz równanie obrazu hiperboli o równaniu $x \cdot y = 2$ w przekształceniu P .

10.20. (R) Sporządź wykres funkcji:

a) $y = \sqrt[4]{\frac{1}{x^4}}$

b) $y = \frac{4-x^2}{x-2}$

c) $y = \frac{|x+2| - \sqrt{x^2-4x+4}}{x}$

10.21. (R) Dana jest funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$. Rozwiąż nierówność $f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) \leq f(x^3) - f\left(\frac{1}{x^3}\right)$.

10.22. (R) Rozwiąż nierówność:

$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \dots + \frac{1}{(x+9)(x+10)} < \frac{1}{x-2}$$

10.23. (R) Rozwiąż równanie:

a) $\frac{5-x}{x^2-1} - \frac{2x-1}{x^2+x+1} = \frac{5x+4}{x^3-1}$

b) $\left| \frac{3}{|x+2|} - 1 \right| = 8$

c) $\left| \frac{6x-3}{2x+1} \right| = 3$

10.24. (R) Rozwiąż nierówność:

a) $\frac{(x-2)^3(x-1)}{(x-5)^2(x+1)} \leq 0$

b) $\frac{x^3-x+6}{x^2} \geq 0$

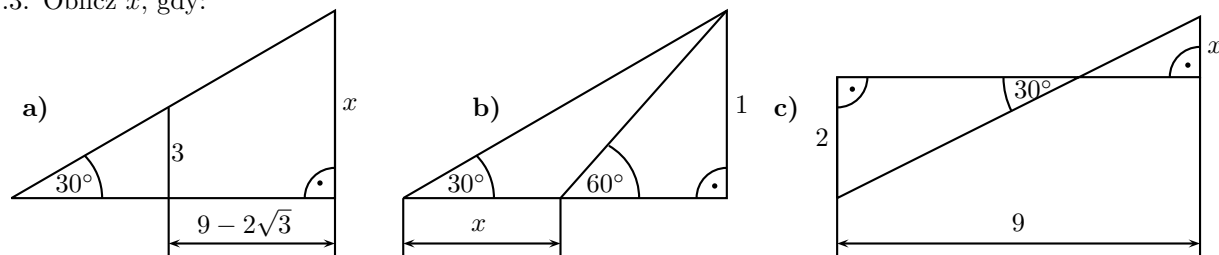
c) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} > \frac{1}{x^2+3x+2}$

d) $\frac{1}{|4-3x|} > 2$

e) $\left| \frac{2x-1}{x+2} \right| < 3$

f) $\left| \frac{1}{|x|} \right| < 1$

11 Funkcje trygonometryczne

11.1. Wyznacz długości boków trójkąta prostokątnego ABC oraz wartości funkcji trygonometrycznych kąta $\sphericalangle CAB$ mając dane $\sin|\sphericalangle(CAB)| = \frac{4}{5}$ i $|BC| = 2$.11.2. Rozwiąż trójkąt prostokątny mając dane przyprostokątne $a = \sqrt{2} - 1$, $b = \sqrt{6} - \sqrt{3}$.11.3. Oblicz x , gdy:11.4. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta AOB , gdzie $A = (4, 0)$, $B = (-4, 3)$, O jest początkiem układu współrzędnych.11.5. Naszkicuj w układzie współrzędnych kąt α taki, że

a) $\sin \alpha = -\frac{1}{3} \wedge \alpha \in \langle 270^\circ, 360^\circ \rangle$

b) $\cos \alpha = \frac{4}{5}$

c) $\tan \alpha = 2 \wedge \alpha \in \langle 180^\circ, 270^\circ \rangle$

d) $\cot \alpha = -\frac{5}{3}$

11.6. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta:

a) $\beta = 120^\circ$

b) $\beta = 210^\circ$

c) $\beta = 315^\circ$

11.7. Oblicz:

a) $\sin 765^\circ$

b) $\cos 1200^\circ$

c) $\sin(-1710^\circ)$

d) $\tan(-750^\circ)$

e) $\cos(-450^\circ)$

f) $\cot(-1395^\circ)$

g) $\sin(-7\pi)$

h) $\cos \frac{15}{2}\pi$

- i) $ctg(-\frac{23}{4}\pi)$
 j) $tg\frac{13}{3}\pi$
 k) $2\sin 150^\circ - 3\cos 120^\circ + tg 135^\circ$

11.8. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta x , gdy:

- a) $\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{5} \wedge x \in (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$
 b) $tg x = -3 \wedge x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$
 c) $\cos x = \frac{2}{3}$

11.9. Wiedząc, że $tg \alpha = 3ctg \alpha$, oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta o mierze α , gdzie $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$.

11.10. Wiadomo, że α jest kątem wypukłym oraz $3\cos \alpha - 6 = -8$. Oblicz $tg \alpha - \sqrt{5}ctg \alpha$.

11.11. Sprawdź, czy istnieje taka liczba x , dla której:

- a) $\sin x = 0,6 \wedge \cos x = 0,8$
 b) $\sin x = \frac{2}{3} \wedge tg x = \frac{1}{3}$
 c) $2\sin^2 x - 1 = 1$
 d) $3\cos x - 2 = -6$
 e) $\sin x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \wedge \cos x = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$

11.12. Oblicz wartość wyrażenia:

- a) $\left(\frac{tg 19^\circ}{ctg 71^\circ} + \frac{ctg 23^\circ}{tg 67^\circ}\right)^{-1}$
 b) $3 - \sqrt{2}\sin^2 13^\circ + tg 41^\circ tg 49^\circ - \sqrt{2}\cos^2 13^\circ$

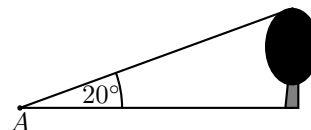
11.13. Pewnego dnia poziom wody y (w metrach) na ławicy piaskowej u wejścia do portu wyrażał się wzorem:
 $y = 14 + 10\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)$, gdzie t oznacza liczbę godzin jaka upłynęła od godziny 12⁰⁰.

Oblicz poziom wody o godzinie 14⁰⁰, 15⁰⁰, 16⁰⁰. O której godzinie tego dnia woda osiągnie najwyższy poziom?

11.14. Wierzchołek latarni morskiej znajduje się 30 metrów nad poziomem morza. W kierunku latarni płynie ponton, z którego widać wierzchołek latarni pod kątem 10° . Po pewnym czasie ponton zbliżył się do latarni tak, że jej wierzchołek widać pod kątem 35° . Jaką odległość przebył ponton w tym czasie?

11.15. Punkt A jest odległy od podstawy drzewa o 40 metrów. Oblicz wysokość drzewa korzystając z tabeli wartości funkcji trygonometrycznych kąta 20° .

$\sin 20^\circ$	$\cos 20^\circ$	$tg 20^\circ$	$ctg 20^\circ$
0,342	0,940	0,364	2,747



Wynik zaokrąglaj z dokładnością do 0,1 metra.

11.16. Naskicuj wykres funkcji f i odczytaj z niego jego miejsca zerowe i zbiór wartości:

- a) $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
 b) $f(x) = \sin x + 2$
 c) $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$
 d) $f(x) = \cos x - 1$
 e) $f(x) = tg\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
 f) $f(x) = tg x + 1$
 g) $f(x) = ctg\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

11.17. Na podstawie wykresu funkcji f wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji w podanym przedziale oraz odczytaj przedziały monotoniczności:

- a) $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 \wedge x \in \langle 0, \pi \rangle$
 b) $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \wedge x \in \langle 0, \pi \rangle$
 c) $f(x) = 1 + tg\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \wedge x \in \langle \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi \rangle$

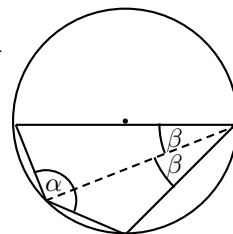
11.18. W przedziale $(0, \pi)$ narysuj wykres funkcji $y = ctg x$.

- a) Ustaw rosnąco liczby: $ctg \frac{3\pi}{7}$, $ctg \frac{\pi}{5}$, $ctg \frac{\pi}{3}$, $ctg \frac{\pi}{12}$.
 b) Zaznacz na osi OX te argumenty, dla których $ctg x < 1$.

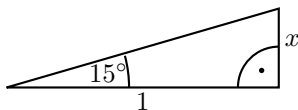
- 11.19. Dla każdego α , dla którego $\sin \alpha \neq 0$ prawdziwy jest wzór $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$. Korzystając z powyższego wzoru oblicz $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12}$.
- 11.20. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{\sin x + \cos x}{2 \sin x - 3 \cos x}$, dla $\operatorname{tg} x = 2$.
- 11.21. Sprawdź, czy podana równość jest tożsamością trygonometryczną:
- a) $1 - (\cos \alpha - \sin \alpha)^2 = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
 - b) $\frac{\cos^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \left(\frac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} \right)^{-1}$
 - c) $\left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha} \right) (1 - \cos \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$ dla $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{C}$
 - d) $\cos \alpha \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = -1$ dla $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \right)$
 - e) $\frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}$, dla $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{C}$.
- 11.22. Rozwiąż równanie:
- a) $\cos 3x = \sin \frac{5}{6}\pi$
 - b) $\operatorname{tg} x = \sin x$, gdy $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$
 - c) $\sqrt{3} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} x \right) = 1$
 - d) $\operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, gdzie $x \in (-\pi, 0)$
 - e) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- 11.23. a) Wyznacz wszystkie liczby z przedziału $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$, które spełniają nierówność $\operatorname{tg} x > -1$.
b) Rozwiąż nierówność $\cos x \leq 0,5$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.
c) Odczytaj z wykresu funkcji, dla jakich wartości argumentu $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$ spełniona jest nierówność $\sin x > -\frac{1}{2}$.
d) Rozwiąż nierówność $\operatorname{ctg} x \geq 1$.
- 11.24. (R) Dla jakich wartości parametru:
- a) m równanie $3 \cos x - 2 = m$ ma rozwiązanie;
 - b) a istnieje rozwiązanie równania $\sin x = 2a - 3$;
 - c) uzasadnij, że $\sin 2 < 2 \sin 1$.
- 11.25. (R) Ustal znak liczby $\operatorname{ctg}(\cos \frac{3}{10})$. Odpowiedź uzasadnij.
- 11.26. (R) a) Oblicz wartość wyrażenia $\sin 2x$, jeśli $\operatorname{ctg} x = 5 \wedge x \in (0, \frac{\pi}{2})$.
b) Sprawdź, czy $\operatorname{ctg} 10^\circ - \operatorname{ctg} 20^\circ = \frac{1}{\sin 20^\circ}$.
c) Na podstawie wzoru: $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$, oblicz: $\sin 75^\circ$.
d) Oblicz $\sin \alpha + \cos \alpha$, gdy $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0,5$.
- 11.27. (R) Dana jest funkcja f o wzorze $f(x) = \cos 2x + 4 \cos x + 3$.
a) Oblicz $f(\pi)$.
b) Wyznacz zbiór miejsc zerowych funkcji f .
- 11.28. (R) Oblicz $\cos 2x$ wiedząc, że $\cos x = \frac{1}{4}(\sqrt{2} + \sqrt{6})$.
- 11.29. (R) Dana jest funkcja f o wzorze $f(x) = \sin x - \cos 2x$.
a) Oblicz wartość $f(x)$ dla $x = \frac{\pi}{2}$.
b) Wykaż, że $f(x) = (\sin x + 1)(2 \sin x - 1)$.
c) Rozwiąż równanie $\frac{f(x)}{\sin 2x} = 0$.
- 11.30. (R) Wykorzystując tożsamość: $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$ wykaż, że $\sin 10^\circ$ jest rozwiązaniem równania: $8x^3 - 6x + 1 = 0$.
- 11.31. (R) a) Naskicuj dla $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$ wykres funkcji $y = |\cos x|$.
b) Naskicuj wykres funkcji $f(x) = -2 \sin x \cos x$ dla $x \in (-\pi, \pi)$, podaj jej miejsca zerowe i przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości dodatnie.
c) Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x) = |1 - \operatorname{tg} x|$.
- 11.32. (R) Wyznacz okres zasadniczy funkcji i sporządź jej wykres $g(x) = \sin x + \cos x$.

- 11.33. (R) Wyznacz największą ujemną liczbę spełniającą równanie $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.
- 11.34. (R) Zbiór A jest zbiorem rozwiązań równania $\cos 3x = \cos x$ w zbiorze liczb rzeczywistych, zaś B zbiorem rozwiązań równania $\sin 4x = 0$ w przedziale $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Wyznacz iloczyn zbiorów A i B .
- 11.35. (R) a) Rozwiąż równanie: $1 + \cos 2x = \cos x$.
 b) Podaj współrzędne punktów przecięcia się wykresów funkcji $y = \sin x$ i $y = \cos 2x$ w przedziale $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$.
 c) Rozwiąż równanie: $\sin\left|\frac{\pi}{2}x\right| = 1$.
 d) Rozwiąż równanie: $1 - \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^3 x + \dots = \frac{\sqrt{2}\cos x}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$.
 e) Rozwiąż równanie $2\cos^2 x = \sin x - 1$.
- 11.36. (R) Oblicz sumę wszystkich rozwiązań równania $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$ należących do przedziału $\langle -\frac{\pi}{2}; \pi \rangle$.
- 11.37. (R) Rozwiąż równanie $\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\sin 4x}$ w przedziale $\langle -\pi, \pi \rangle$.
- 11.38. (R) Rozwiąż nierówności:
 a) $\sin 2x + \sin^2 2x + \sin^3 2x + \dots > \frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$
 b) $4\sin x \cos x \leq 1$ dla $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$
 c) $\operatorname{ctg}^2 x \geq 3$
 d) $|4\cos x - 1| > 1$
- 11.39. (R) Oblicz sumę wszystkich pierwiastków równania $\sin 3x = \operatorname{ctg} \frac{25}{2}\pi$, które spełniają nierówność $|x - 5\pi| \leq 5\pi$.
- 11.40. (R) W trójkącie ostrokątnym ABC dane są: $|AB| = 16$, $|CB| = 14$ i $|\sphericalangle BAC| = 60^\circ$. Oblicz długość boku $|AC|$ oraz długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.
- 11.41. (R) Dwa krótsze boki trójkąta rozwartokątnego mają długość 5 cm i 6 cm. Jakie wartości może przyjmować długość trzeciego boku trójkąta?
- 11.42. (R) Czworokąt jest wpisany w okrąg. Udowodnij, że dla kątów α i β pokazanych na rysunku, zachodzi związek

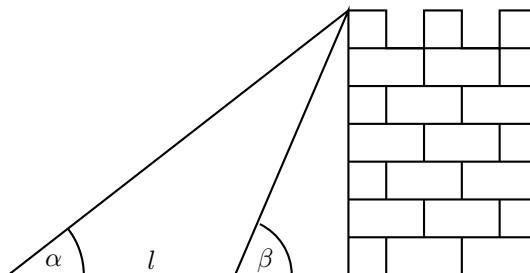
$$2\sin^2 \beta - \operatorname{ctg} \alpha \sin 2\beta = 1.$$



- 11.43. (R) Oblicz x (patrz rysunek).



- 11.44. (R) Wysokość wieży przedstawionej na rysunku można obliczyć zgodnie ze wzorem $h = l \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}$. Uzasadnij powyższy wzór.



- 11.45. (R) Wyznacz pochodną funkcji $y = \frac{x}{1-\cos x}$.
- 11.46. (R) Zbadaj monotoniczność funkcji określonej wzorem $f(x) = 5x + \cos 4x$.

11.47. (R) Zbadaj, czy istnieje styczna do krzywej o równaniu $y = \frac{1}{4}\sin 2x$ równoległa do prostej o równaniu $y = -x$.

11.48. (R) Wyznacz współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \cos^2 2x$ w punkcie $M = (x_0, f(x_0))$ jeśli $x_0 = \frac{3}{8}\pi$.

12 Ciągi

12.1. a) Podaj pięć wyrazów ciągu:

$$a_n = \sqrt{n^2 + n}, \quad b_n = \frac{n-2}{(n+1)!}, \quad c_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & \text{dla } n \text{ nieparzystego} \\ 2, & \text{dla } n \text{ parzystego} \end{cases}$$

b) Które z wyrazów ciągu są równe zero:

$$a_n = \frac{1 + (-1)^n}{2n-1}, \quad b_n = (n^2 - 1)(n^2 - 5n + 6)$$

c) Dany jest ciąg $a_n = n^2 - 6n$. Które wyrazy ciągu są mniejsze od 10?

d) Zbadaj monotoniczność ciągu:

$$a_n = 2n^2 - 3n + 1, \quad b_n = \sin \frac{\pi}{2}n, \quad c_n = -\sqrt{n+4}, \quad d_n = \frac{2+4+6+\dots+2n}{n^2}$$

12.2. Sprawdź, czy dany ciąg jest:

a) arytmetyczny: $a_n = \frac{n}{n+1}$,

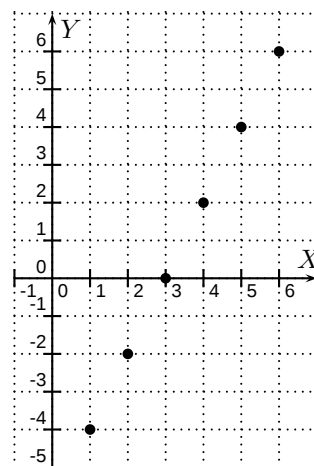
b) geometryczny, gdy $b_n = (a_n)^2$ i $a_n = 3 \cdot 2^n$ oraz czy ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym.

12.3. Na rysunku przedstawiono część wykresu pewnego nieskończonego ciągu arytmetycznego (a_n) .

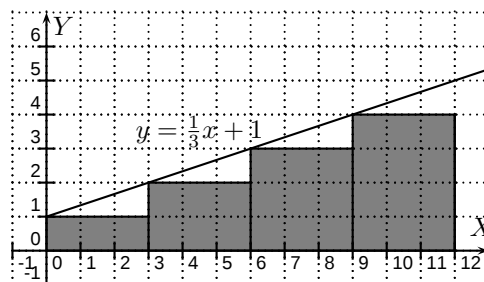
a) Na podstawie wykresu tego ciągu odczytaj jego pierwszy wyraz i różnicę.

b) Podaj wzór na ogólny wyraz tego ciągu.

c) Niech $b_n = -\frac{1}{2}n^2$ będzie wyrazem ogólnym ciągu (b_n) . Dla jakich wartości n , $a_n = b_n$?



12.4. Oblicz pole figury złożonej ze stu prostokątów, które powstały w sposób pokazany na rysunku.



12.5. W nieskończonym ciągu arytmetycznym czwarty wyraz jest równy 17, a suma wyrazów trzeciego i szóstego 39. Wyznacz różnicę i pierwszy wyraz tego ciągu.

12.6. Wyznacz liczbę składników w sumie $2 + 5 + 8 + 11 + \dots + 449$ i oblicz tę sumę.

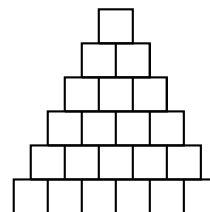
12.7. Pewna figura o polu równym 270 cm^2 składa się ze skończonej liczby prostokątów, których pola tworzą ciąg arytmetyczny. Pole najmniejszego prostokąta wynosi 12 cm^2 , a największego 48 cm^2 .

a) Z ilu prostokątów składa się figura?

b) Oblicz pole trzeciego prostokąta tej figury.

- 12.8. Między liczby $11\frac{4}{5}$ i $15\frac{3}{10}$ wstaw cztery liczby x, y, z, t tak, aby liczby $11\frac{4}{5}, x, y, z, t, 15\frac{3}{10}$ tworzyły ciąg arytmetyczny.

- 12.9. Krzys postanowił wybudować wieżę z klocków, według następującego szkicu projektu. Ma do dyspozycji 210 sześciennych klocków o wysokości 4 cm. Jak wysoką wieżę może zbudować?



- 12.10. Średni zarobek pięciu pracowników pewnej firmy wyniósł w maju 1560 złotych, a najwyższa pensja wyniosła 1800 złotych.
- Oblicz wysokości pensji tych pracowników w maju jeśli wiadomo, że tworzyły one ciąg arytmetyczny.
 - W czerwcu nie pracował już pracownik, który w maju zarabiał najmniej i wtedy pensje pozostałych czterech wzrosły o jednakową kwotę. Ile zarabiał każdy z pozostałych pracowników w czerwcu, jeśli wiadomo, że kwota przeznaczona na wypłatę pensji była w czerwcu taka sama jak w maju?
- 12.11. Przedstaw w tabeli liczby mieszkańców miasta w ciągu 3 lat, zakładając, że miasto w 2004 roku ma 200 tysięcy mieszkańców i liczba ta co roku będzie malała o 5%.

Rok	2004	2005	2006	2007
Liczba mieszkańców	200000			

- 12.12. W tabeli przedstawiono populację pewnej bakterii w milionach sztuk, która rośnie w postępie geometrycznym.

n - liczba tygodni	1	2	3
a_n - liczba bakterii	100	150	225

- O ile procent wzrasta ta populacja z tygodnia na tydzień?
 - Wyznacz wzór ogólny ciągu (a_n) .
 - Czy ta populacja po 7 tygodniach przekroczy 1000 mln sztuk?
- 12.13. Jasio w pierwszym miesiącu nauki opanował 500 słów. W każdym kolejnym miesiącu opanowywał o 20% słów mniej niż w miesiącu poprzednim.
- Ile słów opanuje w trzecim miesiącu nauki?
 - Ile słów Jasio opanuje po czterech miesiącach nauki?
- 12.14. Huśtawkę dziecięcą najpierw odciągnięto do punktu P , a następnie puszczono. W pierwszym wahnięciu huśtawka pokonała drogę długości 2 m do punktu Q , a w każdym następnym wahnięciu poruszała się po łuku, którego długość za każdym razem malała do $\frac{4}{5}$ długości łuku z poprzedniego wahnięcia. Jaką długość łuku zatoczyła huśtawka w piątym wahnięciu, a jaką długość drogi pokonała ona do tego czasu od momentu puszczenia?
- 12.15. Piłka upuszczona z wysokości 6,25 m, odbijając się od ziemi, osiągała za każdym razem wysokość wynoszącą $\frac{3}{5}$ poprzedniej.
- Jak wysoko wzniosła się piłka po trzecim odbiciu się od ziemi?
 - Ile metrów przebyła piłka od momentu upuszczenia do chwili zetknięcia się z ziemią po raz czwarty?
- 12.16. Z dwóch punktów A i B odległych od siebie o $111\frac{1}{5}$ m wyruszają jednocześnie dwa ciała. Pierwsze z nich przebywa w pierwszej sekundzie drogę długości 30 m, a w każdej następnej o 1 m więcej niż w poprzedniej. Drugie w pierwszej sekundzie przebywa drogę długości 5 m, a w każdej następnej $x\%$ tego, co w poprzedniej. Oblicz x , wiedząc, że ciała spotkały się po trzech sekundach.
- 12.17. Liczby $m, 4, n$, w podanej kolejności, są trzema początkowymi wyrazami ciągu geometrycznego, gdzie

$$m = \frac{(2^2)^3 \cdot 2^{-5}}{2^8 : 2^{10}}, \quad n = \left(2^{\frac{1}{2}} - 1\right)^2 + 2^{\frac{3}{2}} - 1.$$

- Oblicz sześć początkowych wyrazów tego ciągu.
- Wyznacz taką liczbę p , aby m, n, p , w podanej kolejności tworzyły ciąg arytmetyczny.

- 12.18. Pan X umówił się z panem Y, że będzie mu wypłacał codziennie przez trzy tygodnie pieniądze, przy czym pierwszego dnia 10 zł, drugiego 20 zł, trzeciego 30 zł, czwartego 40 zł itd. W zamian pan Y wypłaci mu pierwszego dnia 1 grosz, drugiego 2 grosze, trzeciego 4 grosze, czwartego 8 groszy itd. Który z tych panów zyska na umowie i ile?
- 12.19. a) Cena płaszcza była 4 razy podwyższana o 5%. Jaka jest obecna cena płaszcza, jeżeli przed pierwszą podwyżką kosztował on 400 zł?
 b) Kapitał w wysokości 1000 zł złożono w banku na procent składany. Jaka będzie wielkość kapitału po 6 latach przy oprocentowaniu rocznym wynoszącym 5%.
 c) Do jakiej kwoty wzrośnie kapitał 500 zł złożony na 5 lat, jeżeli roczna stopa wynosi 4%, a odsetki są kapitalizowane co pół roku.
 d) Na lokatę roczną, której oprocentowanie wynosi 4,5% w skali roku, wpłacono 5000 zł. Oblicz stan tej lokaty po dwóch latach oszczędzania, jeżeli od naliczonych odsetek będzie pobierany co roku podatek w wysokości 20%.
 e) Inwestor planuje uzyskać w banku kredyt, który zamierza spłacić po czterech latach. Taki kredyt w banku A jest oprocentowany 12% w skali roku, a odsetki są dopisywane do długu co pół roku. Bank B oferuje oprocentowanie roczne 11% z roczną kapitalizacją odsetek, a przy zwrocie kredytu pobiera prowizję w wysokości 4% kwoty udzielonego kredytu. Oceń, która oferta jest korzystniejsza dla kredytobiorcy.
- 12.20. (R) Z ciągu liczb naturalnych $(1, 2, 3, 4, 5, \dots)$ wybrano 100 kolejnych takich liczb, z których każda ma tę samą własność, że jeżeli podzielimy ją przez 3, to otrzymamy resztę jeden. Wyznacz najmniejszą z nich, wiedząc, że suma wszystkich tych liczb jest równa 17950.
- 12.21. (R) Swobodnie spadające ciało w ciągu pierwszej sekundy przebyło drogę 4,9 m, a w ciągu każdej następnej sekundy o 9,8 m więcej niż we wcześniejszej.
 a) Oblicz, ile metrów przebyło to ciało w 12 sekundzie.
 b) Oblicz, ile metrów przebyło to ciało w ciągu 12 sekund.
- 12.22. (R) Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych, które nie dzielą się przez 3.
- 12.23. (R) Różnica między drugim a pierwszym wyrazem ciągu geometrycznego wynosi 5, zaś różnica między czwartym, a pierwszym wyrazem tego ciągu wynosi 35. Wyznacz pierwszy wyraz tego ciągu i jego iloraz.
- 12.24. (R) Na płaszczyźnie dany jest ciąg punktów $P_n = (0, n + 1)$. Punkt $Q_n = (q_n, 0)$ jest punktem przecięcia z osią OX prostej przechodzącej przez punkty: $A = (1, 1)$ i P_n .
 a) Wyznacz wzór ogólny ciągu (q_n) .
 b) Zbadaj monotoniczność ciągu (q_n) .
 c) Wyznacz granicę tego ciągu.
- 12.25. (R) a) Dane są ciągi: (a_n) , (b_n) , (c_n) określone wzorami:

$$a_n = \frac{3 - 5n}{n + 1}, \quad b_n = \frac{4 - n}{2n^2 - 1}, \quad c_n = n^2 - 5n + 1.$$

Oblicz granicę każdego z nich.

Wyznacz najmniejszy wyraz ciągu (c_n) .

b) Dany jest ciąg liczbowy $a_n = 3n^2 - 3n + 2$ określony dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}_+$.

Wykaż, korzystając z definicji monotoniczności ciągu, że ciąg (a_n) jest rosnący.

Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8n^6 + n}}{1 - a_n}$$

c) Ciąg (a_n) określony jest rekurencyjnie w następujący sposób $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1} \end{cases}$, dla $n \geq 1$.

Wyznacz wzór ogólny ciągu oraz oblicz granicę:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[a_n \left(\sqrt{n^2 - 7n} - \sqrt{4n^2 + 5n + 8} \right) \right]$$

12.26. (R) Oblicz granicę ciągu:

a) $a_n = \frac{-4n^2 + 3n + 1}{2 + n + 2n^2}$

b) $b_n = \frac{10n^2-2}{2-n+n^3}$

c) $c_n = \frac{6n^4+n^2-5}{2-n^3}$

d) $d_n = 8 + 2n^3 - 4n^5$

e) $e_n = 3 \cdot 4^n - 5^{n+1}$

f) $f_n = \sqrt{n-2} - \sqrt{n-4}$

g) $g_n = \sqrt[3]{\frac{n^3+2}{8n^3+n}}$

h) $h_n = \frac{3(n+2)!-n!}{(n+2)!+n!}$

i) $i_n = \frac{1+5+25+\dots+5^n}{3-5^{n+1}}$

j) $j_n = \frac{2^n+3^n}{(2 \cdot 3)^n}$

k) $k_n = \frac{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}{3n^3+2n-5}$ wiedząc, że $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

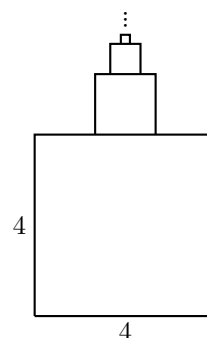
12.27. (R) Dla jakich x prawdziwa jest nierówność:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(|x| + \frac{|x|}{2} + \frac{|x|}{4} + \dots + \frac{|x|}{2^{n-1}} \right) < 1.$$

12.28. (R) Górną podstawę kwadratu o boku długości 4 podzielono na trzy równe części i skonstruowano kwadrat, następnie górną podstawę kwadratu górnego podzielono na trzy równe części i znów skonstruowano kolejny kwadrat, itd.

a) Oblicz sumę obwodów wszystkich kwadratów.

b) Oblicz sumę pól wszystkich kwadratów.



12.29. (R) Uzasadnij, że jeśli liczby x, y, z tworzą ciąg arytmetyczny rosnący, to liczby $2^{3-5x}, 2^{3-5y}, 2^{3-5z}$ tworzą ciąg geometryczny malejący.

12.30. (R) a) Dla jakich wartości x ciąg geometryczny o ilorazie $q = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$ jest zbieżny?

b) Dla jakich wartości x szereg geometryczny $1 + \frac{1}{3x} + \frac{1}{9x^2} + \frac{1}{27x^3} + \dots$ jest zbieżny? Oblicz sumę.

12.31. (R) Rozwiąż równanie, którego lewa strona jest sumą nieskończonego ciągu geometrycznego:

a) $x^2 + x^3 + x^4 + \dots = 1\frac{1}{3}$

b) $x - \frac{1}{2x} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4x} + \frac{x^3}{4} - \frac{1}{8x} + \dots = 1$

12.32. (R) Wyznacz wartość parametru b , dla której

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^2 n}{(b+4)n+b} = 2.$$

12.33. (R) Rozwiąż równanie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2^{x-1} + 2^{2x-2} + 2^{3x-3} + \dots + 2^{nx-n}) = 2 - 2^x.$$

12.34. (R) Rozwiąż nierówność:

a) $\log_3 x + \log_3^2 x + \log_3^3 x + \dots > -\frac{1}{3}$

b) $\sin^2 x + \sin^3 x + \sin^4 x + \dots \geq \frac{1}{2}$ dla $x \in (0, \pi)$.

- 12.35. (R) Liczby $0, (1)$ i $0,0(5)$ są pierwszym i drugim wyrazem nieskończonego ciągu geometrycznego. Oblicz trzeci wyraz tego ciągu i zapisz go w postaci ułamka okresowego.
- 12.36. (R) Udowodnij, że jeżeli ciąg liczb dodatnich tworzy ciąg geometryczny, to logarytmy tych liczb przy dowolnej dodatniej i różnej od 1 podstawie, tworzą ciąg arytmetyczny.
- 12.37. (R) Dane są dwa ciągi: (a_n) , (b_n) , z których każdy jest ciągiem geometrycznym nieskończonym. Pierwszy wyraz ciągu (a_n) jest ilorazem ciągu (b_n) , a pierwszy wyraz ciągu (b_n) jest ilorazem ciągu (a_n) . Drugi wyraz ciągu (a_n) jest dwa razy większy od trzeciego wyrazu ciągu (b_n) , a stosunek sumy wszystkich wyrazów ciągu (a_n) do sumy wszystkich wyrazów ciągu (b_n) jest równy $\frac{9}{8}$. Wyznacz te ciągi.
- 12.38. (R) Dany jest ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{3n+1}{n+2}$.
- Uzasadnij, że ciąg (a_n) jest rosnący.
 - Wyznacz granicę g tego ciągu.
 - Które wyrazy ciągu (a_n) różnią się od granicy g o mniej niż $0,01$?
- 12.39. (R) Udowodnij indukcyjnie, że pochodna funkcji $f(x) = x^n$ dla $n \in \mathbb{N}_+$ jest równa nx^{n-1} , czyli $(x^n)' = nx^{n-1}$.
- 12.40. (R) Dany jest ciąg określony rekurencyjnie:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 3 \cdot a_n + 2, \quad n \in \mathbb{N}^+. \end{cases}$$

Oblicz pięć początkowych wyrazów tego ciągu. Udowodnij metodą indukcji matematycznej, że powyższy ciąg można wyrazić wzorem ogólnym $a_n = 3^n - 1$ dla $n \in \mathbb{N}^+$.

- 12.41. (R) Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest równość:

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}^+} 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + \dots + n \cdot (n+1)^2 = \frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+5)$$

- 12.42. (R) Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $10^n + 4^n - 2$ jest podzielna przez 3.
- 12.43. (R) Wykaż, że $n^3 + 5n$ jest podzielne przez 6, gdy $n \in \mathbb{N}^+$.
- 12.44. (R) Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}^+$ prawdziwa jest równość:

$$n^3 \geq \binom{n+1}{2}.$$

13 Geometria analityczna

- 13.1. Napisz równanie prostej:

- $-6x + 3y + 2 = 0$ w postaci kierunkowej,
- przechodzącej przez punkty $A = (-4, -2)$, $B = (5, 4)$,
- nachylonej do osi OX pod kątem 120° i przechodzącej przez punkt $N = (-3, 2)$,
- równoległej do prostej $l: 6x - y = 0$ i przechodzącej przez punkt $P = (-1, 1)$,
- prostopadłej do prostej $l: \sqrt{2}x - y + 5 = 0$ i przechodzącej przez punkt $M = (2, 1)$.

- 13.2. Napisz równanie symetralnej odcinka AB , gdy $A = (-2, 2)$, $B = (2, 10)$.

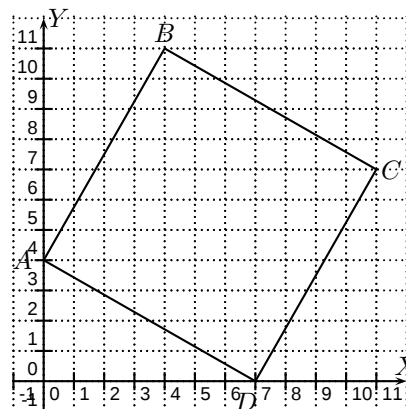
- 13.3. Punkty $A = (5, -1)$, $B = (1, 1)$ są symetryczne względem pewnej prostej. Wyznacz jej równanie.

- 13.4. Dane są punkty: $A = (-3, -1)$, $B = (-1, 0)$ i $C = (-2, 2)$. Oblicz współrzędne i długość wektora: $\vec{w} = 2 \cdot \vec{AB} + \vec{BC}$.

- 13.5. Niech $A = (-4, 3)$, $B = (2, 1)$, $C = (1, -3)$. Wyznacz współrzędne punktu D , tak aby wektor $\vec{CD}$ był wektorem przeciwnym do wektora $\vec{AB}$.

- 13.6. Niech $A = (1, 3)$, $B = (5, 1)$ oraz $C = (4, 3)$. Wyznacz współrzędne punktu M tak, aby $\vec{AM} = \vec{AB} - 2 \cdot \vec{BC}$. Oblicz długość wektora $\vec{AM}$ i współrzędne jego środka.

- 13.7. Znajdź pole kwadratu, którego jednym z wierzchołków jest punkt $A = (1, -3)$, i którego przekątna zawiera się w prostej o równaniu $y = 2x$.
- 13.8. Wyznacz współrzędne punktu B symetrycznego do $A = (2, 3)$ względem prostej $x + 3y - 1 = 0$.
- 13.9. Oblicz odległość między prostymi $y = x$ i $x - y = 5$.
- 13.10. Prosta $x + y - 1 = 0$ zawiera podstawę trójkąta równoramiennego. Jedno ramię trójkąta ma równanie $x - 2y + 2 = 0$. Znajdź równanie drugiej prostej zawierającej ramię trójkąta wiedząc, że przechodzi ono przez $P = (-2, 0)$.
- 13.11. Sprawdź algebraicznie, czy trójkąt o wierzchołkach $A = (5, -4)$, $B = (-1, 2)$, $C = (-4, -1)$ jest trójkątem prostokątnym.
- 13.12. Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A = (0, 4)$, $B = (5, 3)$ i $C = (4, 8)$. Wyznacz punkt przecięcia środkowej poprowadzonej z wierzchołka A z wysokością opuszczoną na bok AB .
- 13.13. Punkty $A = (6, 0)$, $B = (1, 1)$ i C są wierzchołkami trójkąta ABC . Punkt C jest punktem przecięcia prostej o równaniu $y = x - 4$ z osią OY .
- Napisz równanie prostej zawierającej bok AC tego trójkąta.
 - Uzasadnij, że ten trójkąt ma oś symetrii.
 - Oblicz pole tego trójkąta.
- 13.14. Wyznacz miary kątów trójkąta ograniczonego osią OX i prostymi o równaniach: $x - \sqrt{3}y = 0$, $\sqrt{3}x + y - 6 = 0$.
- 13.15. Punkty $A = (1, 1)$, $B = (5, 0)$, $C = (5, 7)$, $D = (1, 6)$ są wierzchołkami czworokąta.
- Wyznacz współrzędne punktu przecięcia przekątnych tego czworokąta.
 - Oblicz pole czworokąta.
 - Czy na tym czworokącie można opisać okrąg?
- 13.16. Punkty $A = (-1, 3)$ i $B = (2, -1)$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku. Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków wiedząc, że przekątne tego równoległoboku są równoległe do osi układu współrzędnych.
- 13.17. Znajdź środek i promień okręgu opisanego na trójkącie ABC , gdy $A = (-4, -2)$, $B = (0, 4)$, $C = (8, 4)$.
- 13.18. Punkty $A = (2, 4)$, $B = (-2, 6)$, $C = (-2, 2)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Oblicz współrzędne wierzchołka D i obwód tego równoległoboku.
- 13.19. Prosta l tworzy z osią x kąt o mierze 45° i przechodzi przez punkt $M = (-2, 2)$. Prosta k , prostopadła do l , przecina oś x w punkcie o odciętej $x_0 = -3$.
- Wyznacz równania prostych k i l .
 - Oblicz długość najdłuższego boku trójkąta, którego boki zawierają się w prostych l i k oraz w osi y .
- 13.20. (R) Okrąg o_1 określony jest równaniem: $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$.
- Napisz równanie okręgu o_2 współśrodkowego z okręgiem o_1 , przechodzącego przez punkt $A = (6, 0)$.
 - Oblicz pole pierścienia kołowego ograniczonego okręgami o_1 i o_2 .
- 13.21. (R) Dla jakich wartości parametru n punkty $A = (2, 1)$, $B = (-3, 2)$, $C = (2n - 1, 1 - n)$ są wierzchołkami trójkąta prostokątnego o kącie prostym przy wierzchołku A .



- 13.22. (R) Rysunek przedstawia kwadrat $ABCD$, gdzie $A = (0, 4)$, $D = (7, 0)$.

- a) Podaj współrzędne wektora $\overrightarrow{DC}$.
b) Podaj równanie prostej AD w postaci ogólnej.

- 13.23. (R) Punkty $M = (3, 1)$, $N = (6, 5)$ są kolejnymi wierzchołkami trapezu $KLMN$. Stosunek długości podstaw trapezu jest równy $1 : 2$. Dłuższa podstawa zawiera się w prostej o równaniu $4x - 3y - 8 = 0$. Oblicz pole trapezu.

- 13.24. (R) W równoległoboku $ABCD$ dane są: $\overrightarrow{AB} = [6; -3]$, $\overrightarrow{BC} = [0; 5]$, zaś środkiem boku AB jest punkt $S = (1; -\frac{1}{2})$.

- a) Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez wierzchołek C , D .
b) Wyznacz równanie prostej CE zawierającej wysokość poprowadzoną z wierzchołka C i przecinającej prostą AB w punkcie E .
c) Opisz przy pomocy układu nierówności liniowych zbiór wszystkich punktów należących do trójkąta BCE .

- 13.25. (R) Wyznacz promień okręgu o środku w początku układu współrzędnych stycznego zewnętrznemu do okręgu

$$x^2 + y^2 + 6x - 8y + 21 = 0$$

- 13.26. (R) Napisz równanie okręgu symetrycznego do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 14x + 2y + 41 = 0$ względem prostej $y = 2x$.

- 13.27. (R) Zilustruj w układzie współrzędnych zbiory A i B oraz oblicz pole figury $A \setminus B$, gdzie

$$A = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x^2 - 4y + y^2 \leq 5\},$$

$$B = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge y > |\sqrt{3}x| + 2\}.$$

- 13.28. (R) Dane są figury:

$$F_1 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 - 6y \leq 0\},$$

$$F_2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge y \leq 6 - |x|\}.$$

- a) Narysuj figury F_1 , F_2 oraz figurę $F = F_1 \cap F_2$.
b) Oblicz pole figury F .

- 13.29. (R) Wyznacz równania stycznych do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$ i prostopadłych do prostej o równaniu $2x - y - 4 = 0$.

- 13.30. (R) Wyznacz równania prostych przechodzących przez początek układu współrzędnych i stycznych do okręgu o środku w punkcie $S = (4, 0)$ i promieniu równym 2.

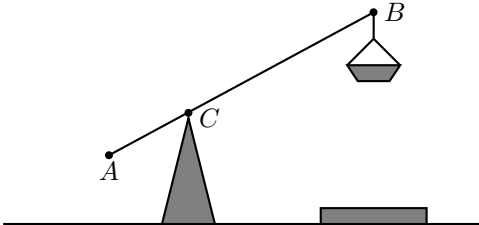
- 13.31. (R) Narysuj w układzie współrzędnych trójkąt ABC o wierzchołkach: $A = (0, 0)$, $B = (3, -1)$ i $C = (1, 3)$.

- a) Narysuj trójkąt $A_1B_1C_1$, który jest obrazem trójkąta ABC w przesunięciu o wektor $\overrightarrow{AD}$, gdzie D jest środkiem boku BC .
b) Narysuj trójkąt $A_2B_2C_2$, który jest obrazem trójkąta ABC w jednokładności o środku A i skali $k = -2$.
c) Oblicz stosunek pola trójkąta $A_2B_2C_2$ do pola trójkąta $A_1B_1C_1$.

- 13.32. (R) Dane są odcinki AB i CD o końcach: $A = (0, -2)$, $B = (-3, 1)$, $C = (5, 1)$ i $D = (0, 6)$. Wyznacz wszystkie jednokładności J_S^k , w których obrazem odcinka AB jest odcinek CD .

- 13.33. (R) a) Dla jakiej wartości m wektory $\vec{a} = [2, 3]$ i $\vec{b} = [-3, m]$ są równoległe.
 b) Dobierz liczby k, l tak aby $k\vec{a} + l\vec{b} = \vec{c}$, gdy $\vec{a} = [2, 3]$, $\vec{b} = [-3, 2]$, $\vec{c} = [5, 5\frac{1}{3}]$.
 c) Wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ mają długości równe 1. Wektor $\vec{a} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$ i wektor $\vec{b} = -8\vec{u} + 7\vec{v}$ są prostopadłe. Wyznacz kąt, jaki tworzą wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$.
- 13.34. (R) a) Dla jakich wartości parametru $m \in \mathbb{R}$ wektory $\vec{a} = \vec{p} + m\vec{q}$, $\vec{b} = 3\vec{p} + \vec{q}$ są prostopadłe, jeżeli:
 $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = 2$ i miara kąta między wektorami $\vec{p}$ i $\vec{q}$ wynosi $\frac{2}{3}\pi$.
 b) Kąt między wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jest równy $\frac{2}{3}\pi$. Oblicz $(4\vec{a} + 3\vec{b})^2$ wiedząc, że $|\vec{a}| = \frac{1}{4}$, $|\vec{b}| = \frac{1}{3}$.
 c) Dla jakiej wartości parametru t , wektory $\vec{a} = [2^{t-1}, 3]$, $\vec{b} = [2, -1]$ są wzajemnie prostopadłe.
- 13.35. (R) W trójkącie ABC mamy dane $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC} = 20$, $|BC| = 7$, $|AB| + |AC| = 13$. Oblicz $|AB|$, $|AC|$, miarę $\sphericalangle BAC$ oraz pole trójkąta ABC .

14 Planimetria

- 14.1. Okrągły obrus został w całości wykrojony z materiału w kształcie kwadratu o boku 4 m. Wiedząc, że materiał został maksymalnie wykorzystany, oblicz ile metrów ozdobnego sznura potrzeba na obszycie brzegu tego obrusa. Podaj wynik z dokładnością do 0,1 m.
- 14.2. W pewnym skansenie jest żuraw studzienny. Jego dźwignię AB podparto w punkcie C tak, że ramiona dźwigni mają długości: $|AC| = 2,4$ m i $|CB| = 7,2$ m. Koniec dźwigni początkowo znajdował się 0,5 m poniżej poziomu punktu podparcia C , a następnie obrócono dźwignię tak, że koniec A znalazł się 0,5 m powyżej poziomu punktu C . O ile metrów opuścił się w tym czasie koniec B dźwigni?
- 
- 14.3. Na pewne wzgórze można wejść pokonując 50 schodów. Każdy schodek ma wysokość 30 cm, a jego powierzchnia użytkowa ma szerokość 40 cm. Oblicz w metrach wysokość h wzgórza i długość d poręczy wzdłuż linii schodów.
- 14.4. Grupa sześciu przyjaciół kupiła tort w kształcie graniastosłupa prostego, którego jedną z podstaw jest trójkąt równoramienny ABC . W trakcie dyskusji - jak podzielić tort na 6 „równych” części, Kryśka przypomniała sobie własność środkowych dowolnego trójkąta i przecięła tort wzdłuż środkowych narysowanych na powierzchni tortu (trójkąta ABC). Czy Kryśka miała rację? Odpowiedź uzasadnij.
- 14.5. Z punktu zewnętrznego P oddalonego o h jednostek od okręgu o promieniu r poprowadzono styczną do okręgu w punkcie S . Niech y oznacza odległość z punktu P do punktu S styczności.
 a) Wyraż odległość y w zależności od wysokości h i promienia r .
 b) Jeśli r jest promieniem Ziemi w milach, a h wysokością na jakiej znajduje się statek kosmiczny nad powierzchnią Ziemi, to z jakiej odległości astronauta widzi punkt najdalej położony na horyzoncie Ziemi? Przyjmij, że statek kosmiczny znajduje się w odległości 200 mil od Ziemi, a promień Ziemi wynosi $r \approx 4000$ mil. Wynik podaj w zaokrągleniu do 1 mili.
- 14.6. Na trzech okręgach parami stycznych zewnętrznie, o promieniu 1 cm, opisano trójkąt równoboczny. Oblicz pole tego trójkąta.
- 14.7. W trójkąt równoramienny, w którym wysokość ma długość 10 cm, a kąt przy podstawie ma miarę 30° , wpisano okrąg. Oblicz długość promienia tego okręgu.
- 14.8. Na trójkącie równoramiennym, o podstawie długości 8 cm i kącie przy podstawie 30° , opisano okrąg. Oblicz długość promienia tego okręgu.

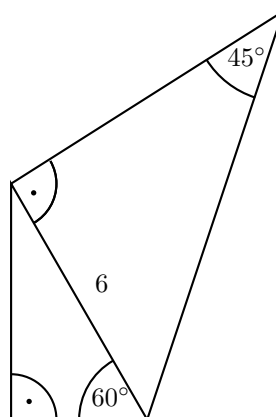
14.9. Dwa okręgi są styczne wewnętrznie, a trójkąt prostokątny ABC wpisany jest w większy okrąg. Średnica małego okręgu ma długość równą połowie przeciwprostokątnej trójkąta ABC .

- Wyjaśnij dlaczego trójkąty ABC i OBE są podobne i podaj skalę podobieństwa (O - środek większego okręgu, E - punkt wspólny mniejszego okręgu i przyprostokątnej BC).
- Oblicz stosunek pól tych trójkątów.

14.10. Oblicz obwód rombu, którego pole jest równe 384, a stosunek długości przekątnych wynosi 3 : 4.

14.11. Przekątna czworokąta dzieli go na dwa trójkąty prostokątne.

- Oblicz obwód tego czworokąta.
- Jaką część pola czworokąta stanowi pole mniejszego trójkąta? Wynik podaj w zaokrągleniu do 0,1.



14.12. Dany jest równoległobok o bokach długości 16 i 10 oraz kącie ostrym 30° . Oblicz:

- długość dłuższej wysokości równoległoboku,
- długość krótszej przekątnej równoległoboku.

14.13. W trapezie prostokątnym dłuższa przekątna ma długość 12 cm i tworzy z dłuższym ramieniem kąt o mierze 30° , natomiast z krótszym ramieniem kąt o mierze 60° . Oblicz pole tego trapezu.

14.14. Dany jest trapez równoramienny, którego ramię ma długość 6 i jest nachylone do dłuższej podstawy pod kątem 60° . Podstawa ta ma długość 10.

- Oblicz obwód i pole trapezu.
- Oblicz długość przekątnej trapezu.
- Oblicz odległość punktu przecięcia się przekątnych od dłuższej podstawy.

14.15. W trapezie równoramiennym $ABCD$ środki kolejnych boków połączono odcinkami. W ten sposób trapez został podzielony na cztery trójkąty i jeden czworokąt. Uzasadnij, że suma pól tych trójkątów jest równa polu otrzymanego czworokąta.

14.16. W okrąg o środku O i promieniu $R = 6$ cm wpisano czworokąt $ABCD$. Kąty środkowe: $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$ i $\sphericalangle DOA$ mają odpowiednio miary: 45° , 150° , 135° i 30° . Oblicz pole czworokąta $ABCD$.

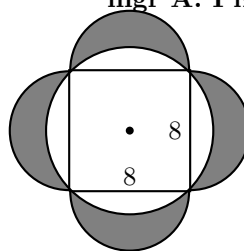
14.17. Dany jest kwadrat. Pole koła opisanego na tym kwadracie jest o 8π większe od pola koła wpisanego w ten kwadrat. Oblicz pole kwadratu.

14.18. Miary trzech kolejnych kątów czworokąta wpisanego w okrąg tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy $r = 52^\circ 32'$. Oblicz miary wszystkich kątów wewnętrznych tego czworokąta.

14.19. Na okręgu opisano trapez prostokątny, którego długości ramion są równe 24 cm i 25 cm. Oblicz:

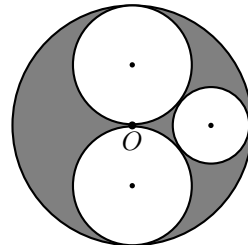
- długości podstaw trapezu,
- pole trapezu,
- długości przekątnych trapezu,
- długość okręgu,
- o ile procent obwód trapezu jest większy od długości okręgu,
- pole części trapezu znajdujące się poza kołem,
- stosunek pola trapezu do pola koła.

14.20. Oblicz obwód i pole zacieniowanego obszaru.

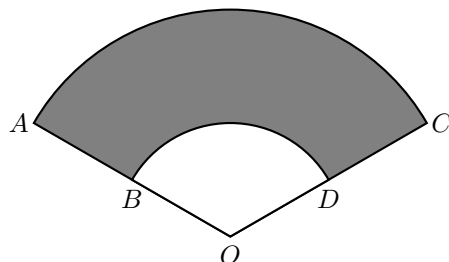


14.21. Dane są cztery okręgi parami styczne. Promień największego okręgu o środku O jest równy 2.

- Oblicz długość promienia najmniejszego okręgu.
- Oblicz pole zacieniowanego obszaru.

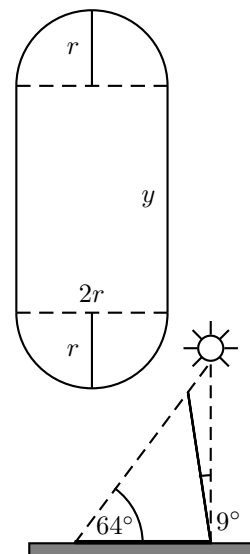


14.22. Rysunek przedstawia kształt obszaru zakreślonego przez wycieraczkę szyby samochodu. Kąt AOC ma miarę $2,5$ radiana oraz $|OB| = 20$ cm, a ramię BA wycieraczki ma długość 30 cm. Oblicz pole obszaru, który wyczyści wycieraczka.



14.23. Okno ma kształt prostokąta z dołączonymi na dole i na górze półkami.

- Podaj wzór na pole P powierzchni okna w zależności od r i y .
- Uzasadnij, że jeśli obwód okna jest równy 6 m, to pole P wyraż się wzorem $P = 6r - \pi r^2$ [m²].
- Dla jakiego r pole powierzchni okna, którego obwód jest równy 6 m, jest największe?

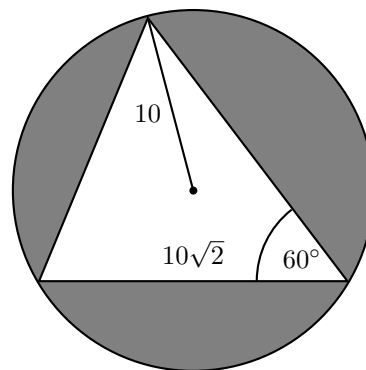


14.24. (R) Z punktu A widać słup telefoniczny pod kątem o mierze 64° . Słup jest odchylony od pionu o kąt miary 9° w kierunku drogi na powierzchni ziemi, na którą słońce rzuca cień. Długość cienia jest równa 6,4 m. Oblicz w zaokrągleniu do 1 m długość tego słupa.

14.25. (R) Oblicz długość środkowej trójkąta opuszczonej na bok o długości 8, gdy pozostałe boki mają długość 6 i 7.

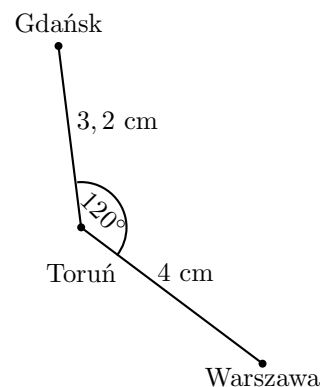
14.26. (R) Udowodnij twierdzenie: „Jeżeli w trójkąt prostokątny wpiszemy okrąg, to iloczyn długości odcinków, na które dzieli przeciwprostokątną punkt styczności z okręgiem równa się polu tego trójkąta.”

- 14.27. (R) Oblicz pole zacieniowanej figury.



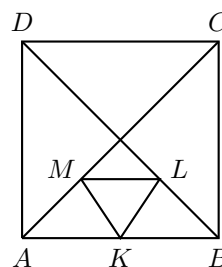
- 14.28. (R) Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt o bokach długości 5, 5 i 8.
- 14.29. (R) Przez środek wysokości trójkąta równobocznego poprowadzono prostą równoległą do jednego z boków. Oblicz stosunek pól figur na jakie prosta podzieliła trójkąt. (Rozpatrz dwa przypadki.)
- 14.30. (R) W trójkącie ABC , o kącie rozwartym przy wierzchołku C dane są długości boków $|AC| = 5$ cm i $|BC| = 12$ cm. Oblicz długość boku AB wiedząc, że pole trójkąta jest równe 24 cm².

- 14.31. (R) W oparciu o dane przedstawione na rysunku w skali 1 : 5500000 oblicz rzeczywistą odległość w linii prostej z Warszawy do Gdańska. Wynik podaj w zaokrągleniu do 1 km.



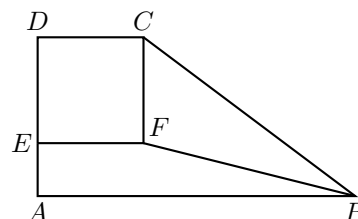
- 14.32. (R) Boki trójkąta mają długości $5, 3\sqrt{2}, \sqrt{13}$. Wyznacz miarę kąta znajdującego się naprzeciw najkrótszego boku oraz pole trójkąta.

- 14.33. (R) Kwadrat $ABCD$ ma bok długości 2. Trójkąt KLM jest równoboczny. Oblicz pole tego trójkąta.



- 14.34. (R) W kwadracie $ABCD$ o boku długości 1 punkt K jest środkiem boku DC . Oblicz pole czworokąta $APKD$, gdzie P jest punktem przecięcia przekątnej AC i odcinka KB .
- 14.35. (R) Przekątne AC i BD kwadratu $ABCD$ przecinają się w punkcie O . Punkt M jest środkiem odcinka OD , N - środkiem boku BC . Udowodnij, że trójkąt AMN jest prostokątny i równoramienny.
- 14.36. (R) Trapez prostokątny podzielono odcinkiem równoległym do obu podstaw na dwie części o równych polach. Wyznacz długość tego odcinka wiedząc, że podstawy tego trapezu są długości 40 i 60, a ramię prostopadłe do podstaw ma długość 100.

- 14.37. (R) Trapez prostokątny $ABCD$ podzielono na trzy części o równych polach. Wiedząc, że czworokąt $EFCD$ jest kwadratem o boku długości 6 cm oblicz:
- obwód trapezu $ABCD$,
 - cosinus kąta CFB .

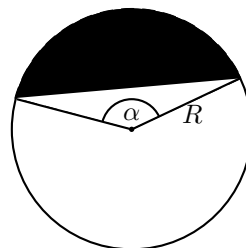


14.38. (R) Pole figury ograniczonej okręgiem opisanym na sześciokącie foremnym i brzegiem sześciokąta jest równe $4\pi - 6\sqrt{3}$. Wyznacz:

- a) długość boku tego sześciokąta foremnego,
b) długość tego okręgu.

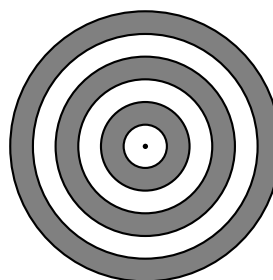
14.39. (R) Uzasadnij, że pole odcinka koła przedstawionego na rysunku można obliczyć według wzoru:

$$S = \frac{R^2}{2} \left(\frac{\pi}{180} \cdot \alpha - \sin \alpha \right).$$



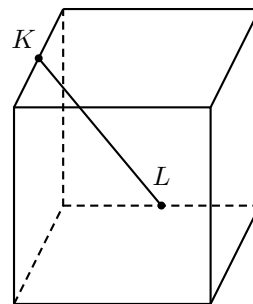
14.40. (R) Trójkąt prostokątny ABC ma boki długości 3, 4, 5. Oblicz promień okręgu stycznego do przeciwprostokątnej i prostych będących przedłużeniami przyprostokątnych.

14.41. (R) Promienie współśrodkowych okręgów przedstawionych na rysunku są równe odpowiednio 1, 2, 3, 4, 5 i 6. O ile procent pole obszaru zacieniowanego jest większe od pola obszaru niezacieniowanego zawartego w kole o promieniu 6?



15 Stereometria

15.1. Oblicz długość odcinka KL łączącego środki dwóch krawędzi sześcianu, którego krawędź ma długość 6.



15.2. Przekątna d prostopadłościanu o podstawie kwadratowej jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $\alpha = 60^\circ$. Krawędź podstawy ma długość 4.

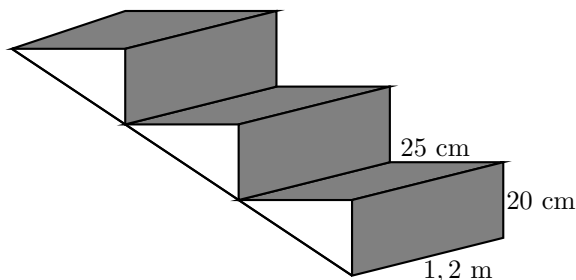
- a) Wyznacz długość przekątnej d .
b) Oblicz objętość tego prostopadłościanu.
c) Zaznacz na rysunku kąt nachylenia przekątnej d do ściany bocznej prostopadłościanu.

15.3. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, którego pole podstawy jest równe 81 cm^2 a kąt między przekątną ściany bocznej i krawędzią podstawy ma miarę 60° .

15.4. Oblicz pole powierzchni graniastosłupa prostego, którego przekątna ściany bocznej ma długość b , zaś podstawą jest trójkąt równoboczny o boku długości a .

15.5. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość graniastosłupa wiedząc, że ma on 18 krawędzi i każda z nich jest równa 4cm.

15.6. Należy dwukrotnie pomalować powierzchnię boczną pięciu kolumn mających kształt graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź podstawy jest równa 40 cm, a wysokość 5 m. Przy pierwszym malowaniu litr farby wystarcza na pokrycie 10 m^2 powierzchni, a przy drugim - zużyto o 20% farby mniej. Ile należy kupić pięciolitrowych puszek farby?



- 15.7. Schody składają się z 15 jednakowych betonowych stopni, których wymiary podano na rysunku. Oblicz objętość betonu zużytego na ich wykonanie.
- 15.8. Podstawą ostrosłupa o wysokości h jest trójkąt równoboczny. Dwie ściany boczne tego ostrosłupa są prostopadłe do podstaw, a trzecia tworzy z podstawą kąt o mierze α . Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.
- 15.9. Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa czworokątnego prawidłowego jest równe 27 cm^2 . Krawędź jego podstawy ma długość 3 cm .
- Oblicz wysokość ściany bocznej tego ostrosłupa.
 - Naszkicuj jego siatkę.
 - Oblicz jego objętość.
 - Wyznacz miarę kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.
- 15.10. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym kąt między krawędzią boczną ostrosłupa i jego wysokością ma miarę 30° , a krawędź podstawy ma długość $4\sqrt{2} \text{ cm}$. Oblicz objętość ostrosłupa.
- 15.11. Powierzchnią boczną stożka jest wycinek koła o kącie 240° i promieniu 12 cm . Oblicz pole podstawy tego stożka.
- 15.12. Poziom wody w zbiorniku w kształcie stożka, o średnicy 60 cm i tworzącej 50 cm , sięga połowy jego wysokości. Do zbiornika wlewamy wodę w tempie $25 \text{ cm}^3/\text{s}$. Po ilu minutach zbiornik będzie pełny? (Do obliczeń przyjmij $\pi \approx 3$.)
- 15.13. W wyniku pełnego obrotu trójkąta prostokątnego, o przyprostokątnej $3\sqrt{3}$ i przeciwprostokątnej 6 , wokół prostej zawierającej krótszą przyprostokątną otrzymujemy bryłę. Oblicz objętość tej bryły i wyznacz kąt nachylenia tworzącej do płaszczyzny podstawy.
- 15.14. W wyniku pełnego obrotu trójkąta prostokątnego, równoramiennego, o przyprostokątnej długości 6 , wokół prostej zawierającej przeciwprostokątną otrzymujemy bryłę obrotową. Oblicz jej objętość i pole powierzchni.
- 15.15. Wzór na objętość stożka ściętego ma postać

$$V = \frac{1}{3}\pi h (R^2 + Rr + r^2),$$

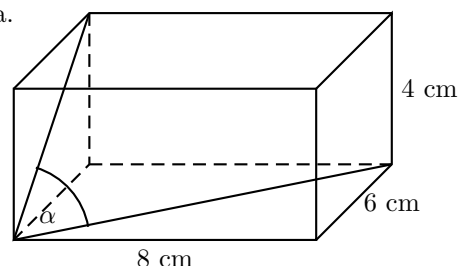
gdzie R oznacza promień dolnej podstawy stożka, r - promień górnej podstawy stożka i h - wysokość stożka ściętego.

Pewne naczynie ma kształt stożka ściętego, w którym $R = 4$, $r = 2$ oraz $h = 6$. Naczynie zostało wypełnione wodą do połowy wysokości. Jaki procent objętości całego naczynia stanowi objętość wody? Wynik podaj w zaokrągleniu do $0,1\%$.

- 15.16. Pojemnik do przechowywania gazu ma kształt walca, o wysokości 3 m , zakończonego z obu stron półkolistymi kopułami. Wiedząc, że pole jego powierzchni całkowitej jest równe $4\pi \text{ m}^2$, oblicz objętość pojemnika.
- 15.17. Piętrowy tort przygotowany na bal maturalny składał się z pięciu warstw, z których każda miała kształt walca. Długości promieni walców, wyrażone w cm były kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego o różnicy $a = -5$. Długość promienia podstawy środkowej warstwy tego tortu była równa 20 cm , a jej objętość $3200\pi \text{ cm}^3$. Wszystkie warstwy wykonane były z tego samego rodzaju ciasta i miały jednakową wysokość. Oblicz, ile mąki należało przygotować do wypieku całego tortu, jeżeli receptura przewiduje wykorzystanie $0,24 \text{ kg}$ mąki do wypieku warstwy środkowej.
- 15.18. Metalową kulę o promieniu 10 cm oraz stożek, w którym średnica i wysokość wynoszą odpowiednio 16 cm i 12 cm przetopiono. Następnie z otrzymanego metalu wykonano walec o średnicy $\frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$. Oblicz wysokość walca.

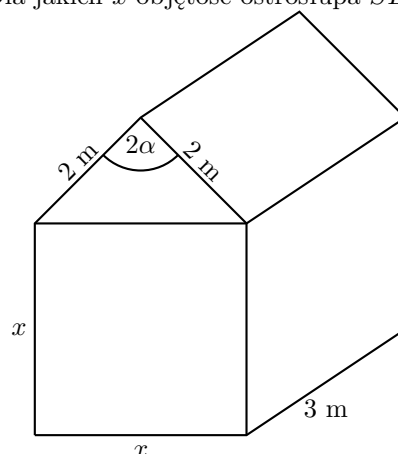
- 15.19. Metalową kulę o promieniu $R = 5$ cm w całości przetopiono na kuleczki o promieniu $r = 0,25$ cm. Ile uzyskano w ten sposób kuleczek?
- 15.20. Przyjmując, że Ziemia jest kulą o promieniu $r = 6370$ km, oblicz jej pole powierzchni. Jaki procent powierzchni Ziemi stanowi powierzchnia lądów a jaki powierzchnia Polski, gdy łączna powierzchnia lądów jest równa 149 mln km² a Polski wynosi 322,6 tys. km².
- 15.21. **a)** Dane są dwie kule. Objętość pierwszej kuli jest równa 36π cm³, a druga kula ma promień dwa razy dłuższy od promienia pierwszej kuli. Podaj objętość drugiej kuli. Jaki jest stosunek pól powierzchni tych kul?
b) Po dopompowaniu powierzchnia kulistego balonu zwiększyła się o 44%. O ile wzrosła objętość balonu?
- 15.22. **a)** W kulę o promieniu 8 cm wpisano walec o promieniu podstawy 4cm. Oblicz objętość walca.
b) Na sześciacie o krawędzi długości a opisano kulę w ten sposób, że wierzchołki sześciatu należą do powierzchni kuli. Oblicz objętość kuli.
c) W ostrosłup prawidłowy czworokątny wpisano kulę o promieniu 2. Ściany boczne ostrosłupa są nachylone do jego podstawy pod kątem 60° . Oblicz długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa.
- 15.23. (R) W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym pole podstawy równa się $12\sqrt{3}$. Pole przekroju płaszczyzną zawierającą krawędź podstawy i wierzchołek górnej podstawy - $20\sqrt{3}$. Oblicz sinus kąta nachylenia płaszczyzny tego przekroju do płaszczyzny podstawy graniastosłupa.

- 15.24. (R) Prostopadłościenne pudełko ma wymiary $8\text{cm} \times 6\text{cm} \times 4\text{cm}$. Wyznacz miarę kąta α w zaokrągleniu do 1° między przekątną podstawy pudełka, a przekątną tej ściany bocznej, która ma wymiary $6\text{cm} \times 4\text{cm}$.



- 15.25. (R) Oblicz pole przekroju sześciatu o krawędzi a płaszczyzną zawierającą przekątną jednej ściany i środki dwóch krawędzi przeciwległej ściany.
- 15.26. (R) Oblicz odległość wierzchołka sześciatu, którego krawędź ma długość a , od tej przekątnej sześciatu, do której ten wierzchołek nie należy.
- 15.27. (R) W prostopadłościanie o podstawach $ABCD$ i $EFGH$ mamy $|AB| = 6$, $|BC| = 5$ i $|AE| = 12$. Niech S będzie punktem krawędzi AE oraz $|AS| = x$, gdzie $0 < x < 12$. Dla jakich x objętość ostrosłupa $SEFH$ jest większa od objętości ostrosłupa $SABCD$?

- 15.28. (R) Drewnutnia ma kształt prostopadłościanu, nakrytego dwuspadowym dachem. Wymiary drewnutni przedstawiono na rysunku.
a) Wyznacz objętość użytkową drewnutni (objętość prostopadłościanu w m³) jako funkcję α .
b) Dla jakiego kąta $\alpha \in \langle \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6} \rangle$ objętość użytkowa drewnutni jest największa?



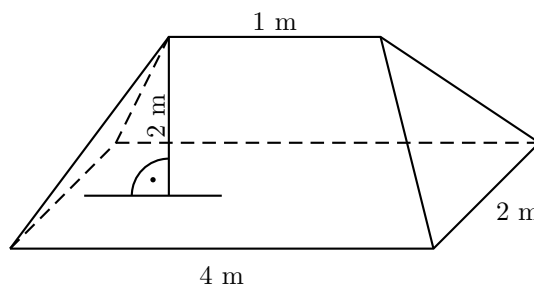
- 15.29. (R) W kulę o promieniu $R = 4$ wpisano sześciat. Oblicz jaki procent objętości kuli stanowi objętość sześciatu. Wynik podaj z zaokrągleniem do 1%.
- 15.30. (R) Wierzchołek namiotu w kształcie czworokątnego ostrosłupa prawidłowego jest podtrzymywany przez maszt o długości 1,5 m. Wyznacz długość krawędzi jego podstawy, wiedząc, że pole powierzchni materiału zużytego na uszycie tego namiotu wraz z podłogą (pomijamy szczyt) jest równa 8 m².

15.31. (R) Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość $a = 4$, zaś krawędź boczna $b = 7$.

a) Oblicz objętość tego ostrosłupa.

b) Wyznacz cosinus kąta między krawędziami bocznymi nie należącymi do jednej ściany bocznej tego ostrosłupa.

15.32. (R) Oblicz objętość narysowanej przysmy, której krawędzie boczne są równej długości.



15.33. (R) Do salaterki wiano rozpuszczoną galaretkę, która po zastygnięciu przybrała kształt stożka ściętego. Przekrój osiowy tej bryły był trapezem równoramiennym o wysokości 6 cm i podstawach długości 14 cm i 26 cm. Oblicz objętość wianego płynu. W obliczeniach przyjmij, że $\pi = 3,14$, a wynik podaj z zaokrągleniem do 1 cm^3 .

15.34. (R) Pole powierzchni kuli wpisanej w stożek jest równe polu podstawy. Oblicz:

a) stosunek pola powierzchni kuli do pola powierzchni bocznej stożka,

b) jaką część objętości stożka jest objętość kuli?

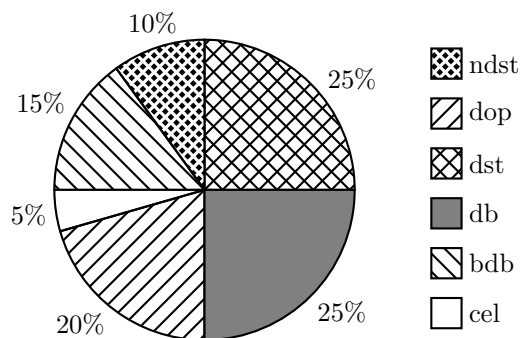
15.35. (R) Trójkąt równoramienny o obwodzie równym 16 cm obraca się dookoła podstawy. Dla jakiej długości boków trójkąta objętość otrzymanej bryły będzie maksymalna?

15.36. (R) Przekątna przekroju osiowego walca ma długość równą $2\sqrt{3}$. Jaką największą objętość może mieć ten walec?

15.37. (R) W stożek, którego wysokość ma długość $H = 12 \text{ dm}$, a promień jego podstawy ma długość $R = 4 \text{ dm}$ wpisano walec, o podstawach równoległych do podstawy stożka. Jakie powinny być wymiary walca, aby jego objętość była największa?

16 Statystyka

16.1. Wojtek otrzymał w ciągu jednego roku szkolnego 20 ocen z języka polskiego. Częstość poszczególnych ocen przedstawiono na diagramie kołowym. Oblicz średnią, modę i medianę zestawu ocen Wojtka.



16.2. Średnia arytmetyczna liczb: 11, 12, 8, 11, x , 3, 4, 6, 8, 8 jest równa 8,5.

a) Wyznacz x .

b) Wyznacz medianę tych liczb.

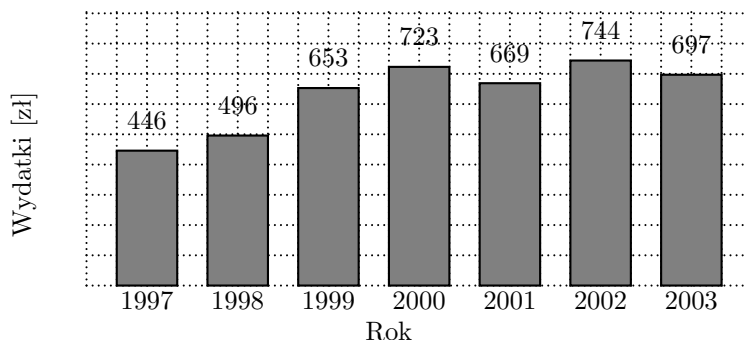
16.3. Diagram przedstawia średnie wydatki rodziców związane z początkiem roku szkolnego.

a) Oblicz średnią wydatków w latach od 2001 do 2003.

b) Jaką kwotę wydano w 2002 roku na podręczniki, jeśli wiadomo, że pochłonęły one wtedy 51% wydatków? Wynik podaj w zaokrągleniu do 1 zł.

c) Wyznacz medianę podanego zbioru wydatków.

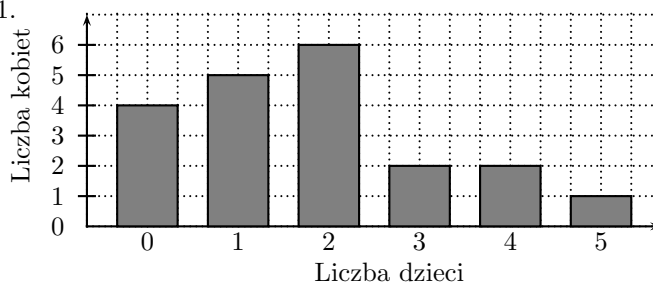
d) O ile procent mniej w porównaniu z rokiem 2002 wyniosły wydatki w roku 2003?



16.4. Cztery babcie grały w brydża. Średnia ich wieku wynosiła 74 lata. Gdy po pierwszym robrze babcia Matylda zrezygnowała z gry, pozostałe babcie grały „z dziadkiem”, a średnia wieku grających zmniejszyła się o 2 lata. Trzeciego robra wytrwale rozegrały już z dziadkiem Stefanem, który miał 76 lat. Ile lat ma babcia Matylda? Jaka jest średnia wieku rozgrywających trzeciego robra?

16.5. Wzrost zawodniczek reprezentacji Polski w siatkówce wynosi w centymetrach: 173, 176, 179, 180, 180, 182, 183, 187, 191, 191, 192, 194. Oblicz średni wzrost siatkarek oraz wariancję i odchylenie standardowe ich wzrostu. Wynik podaj w zaokrągleniu do 0,01.

16.6. Każdą z dwudziestu kobiet zapytano o liczbę posiadanych dzieci. Otrzymane wyniki przedstawiono na histogramie. Oblicz średnią liczbę dzieci posiadanych przez jedną kobietę oraz odchylenie standardowe liczby dzieci.



16.7. Oblicz średnią arytmetyczną, wariancję i odchylenie standardowe podanego zestawu danych za pomocą tabelki częstość występowania liczby pestek w winogronach. Wynik podaj w zaokrągleniu do 0,1.

Liczba pestek	0	1	2	3
Liczba owoców	5	50	35	10

16.8. Wśród uczniów pewnej klasy maturalnej dokonano pomiaru ilorazu inteligencji IQ i przedstawiono jego wyniki w poniższej tabeli:

Pomiary ilorazu IQ	127	128	130	132	134	136	140	142	144	148	149	151	153
Liczba wskazań	1	1	1	2	2	5	2	2	3	2	2	2	3

a) Wyznacz średnią, medianę i modę ilorazu inteligencji ucznia badanej klasy.

b) Oblicz wariancję i odchylenie standardowe tej próbki danych. Wynik podaj w zaokrągleniu do 0,01.

16.9. Do matury z matematyki na poziomie rozszerzonym przystąpiło 10 uczniów. Wyniki przedstawia tabela:

Liczba punktów	9	16	26	33	35	42	47	50
Liczba uczniów	1	2	2	1	1	1	1	1

a) Oblicz średnią arytmetyczną uzyskanych wyników.

b) Oblicz medianę i modę tego zestawu danych.

c) Oblicz wariancję i odchylenie standardowe.

d) Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:

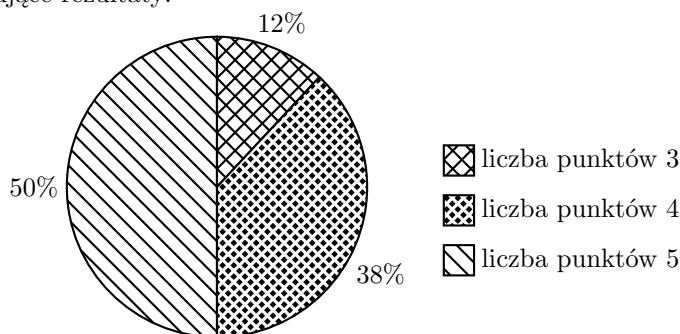
A - losowo wybrany maturzysta zdobył na maturze nie mniej niż 40 pkt,

B - losowo wybrany maturzysta zdobył na maturze mniej niż 15 pkt,

C - losowo wybrany maturzysta zdobył na maturze nie mniej niż 20 pkt i nie więcej niż 40 pkt,

D - losowo wybrany maturzysta zdobył na maturze mniej niż 8 pkt.

- 16.10. Właściciel sklepu spożywczego w przypadku każdego nowego produktu przeprowadza test polegający na tym, że 50 losowo wybranych osób ocenia ten produkt w skali 0 do 5 punktów, w trzech kategoriach: **C** - ceny, **S** - smaku i **W** - wyglądu opakowania. Następnie właściciel oblicza średnią ważoną z następujących liczb: s_1 średniej liczby punktów w kategorii **C** (z wagą 5), s_2 średniej liczby punktów w kategorii **S** (z wagą 3), s_3 średniej liczby punktów w kategorii **W** (z wagą 2). W przypadku gdy tak obliczona średnia jest większa od 3 właściciel decyduje, że towar będzie sprzedawany w jego sklepie. Badania dotyczące nowego rodzaju kawy dały następujące rezultaty: w kategorii **W**:



W kategorii **C** obliczona średnia była równa $s_1 = 2,42$, a w kategorii **S** $s_2 = 4,32$. Oblicz s_3 oraz oceń czy w rezultacie przeprowadzonego testu właściciel sklepu zdecyduje się na sprzedaż nowego gatunku kawy.

- 16.11. Podczas zawodów w łyżwiarstwie figurowym dziewięciu sędziów przyznawało noty za technikę i prezentację programu łyżwiarskiego. Punkty były przyznawane w skali 0,0 do 6,0. Nota za technikę jest średnią arytmetyczną uzyskanych punktów, podobnie nota za prezentację programu. Oblicz końcowe noty dwóch par, których punktacja została podana w tabeli, jeśli końcowa nota jest:
- średnią arytmetyczną noty za technikę i prezentację,
 - średnią ważoną: nota za technikę ma wagę 0,6, a nota za prezentację - wagę 0,4.

Para I	technika	5,0	5,1	5,0	5,2	5,5	5,0	5,3	5,1	5,6
	prezentacja	4,9	5,0	4,8	5,2	5,4	4,9	5,0	4,8	5,0
Para II	technika	6,0	5,8	5,9	6,0	5,7	5,8	5,7	5,9	5,4
	prezentacja	5,5	5,8	5,5	5,9	5,6	5,8	5,9	5,4	5,9

- 16.12. Nauczycielka matematyki w klasie Jacka ocenia w semestrze prace w następujących kategoriach: kartkówka (z wagą 20), praca domowa i odpowiedź ustna (z wagą 15), praca na lekcji (z wagą 10) oraz sprawdzian (z wagą 40). Na semestr proponuje ocenę x , jeśli średnia ważona ocen znajduje się w przedziale $\langle x - 0,25, x + 0,75 \rangle$, $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Czy Jacek ma szansę mieć na semestr ocenę dobrą, jeśli dotychczas uzyskał w wymienionych kategoriach odpowiednio oceny: 2, 3, 4, 4, a może zdobyć jeszcze tylko jedną ocenę ze sprawdzianu? Na jaką ocenę musiałby zaliczyć ten sprawdzian?

17 Kombinatoryka

- 17.1. (R) Oblicz:

- $(\sqrt{2} + 1)^4$
- $(1 - \sqrt{3})^5$
- $(p + \sqrt{p})^3$

- 17.2. (R) Wykonano potęgowanie dwumianu $(x^2 + \frac{1}{x})^9$ i uporządkowano jego składniki. Oblicz współczynnik stojący przy x^3 .

- 17.3. Oznaczmy przez P_{13} liczbę wszystkich uporządkowań zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 13\}$. Sprawdź, czy P_{13} dzieli się przez:

- 11
- 17
- 12!

- 17.4. Dana jest liczba $a = \binom{15}{12}$.
- Sprawdź, czy liczba a dzieli się przez 5.
 - Sprawdź, czy liczba 2 jest dzielnikiem liczby a .
 - Wyznacz liczbę wszystkich dzielników naturalnych liczby a .
- 17.5. a) Oblicz n , gdy $\binom{n}{4} = 35$.
- Różnica między $\binom{n}{2}$ a $\binom{n}{1}$ wynosi 5. Oblicz n .
 - Rozwiąż równanie: $20P_{n-2} = P_n$, gdzie P_n oznacza liczbę wszystkich permutacji zbioru n elementowego.
 - Rozwiąż równanie: $C_{x-4}^{x-5} = P_3$.
 - Rozwiąż równanie: $\binom{x}{2} - \binom{x}{3} = 0$, gdzie $x \in \{3, 4, \dots\}$.
- 17.6. Pan Kowalski założył w swojej firmie zamek z czterocyfrowym kodem. Aby mógł łatwiej zapamiętać, wybrał kod, w którym suma dwóch pierwszych cyfr równa jest 12, a suma dwóch ostatnich cyfr 10. Ile miał możliwości wyboru kodu?
- 17.7. a) Ile słów dziesięcioliterowych można utworzyć ze słowa ANALFABETA?
- Na ile sposobów można ułożyć na półce 30 książek, spośród których 20 jest mniejszego formatu a 10 większego tak, aby mniejsze i większe książki nie były ze sobą pomieszane?
 - Do przedziału kolejowego drugiej klasy (dwa rzędy po 4 miejsca) wchodzi 8 osób. Na ile sposobów mogą one zająć miejsca tak, aby ustalone dwie osoby A oraz B siedziały:
 - obok siebie,
 - naprzeciwko siebie.
- 17.8. Na jednej prostej dane są 4 różne punkty, na innej prostej równoległej do niej 6 różnych punktów. Ile istnieje
- trójkątów,
 - czworokątów,
- których wierzchołkami są dane punkty?
- 17.9. a) Na okręgu zaznaczono sześć punktów. Ile różnych wielokątów o wierzchołkach w tych punktach można narysować?
- Na ile sposobów można podzielić 10 książek między dwie osoby tak, aby każda z nich miała 5 książek?
 - Firma cateringowa dostarcza zestawy posiłków. Do wyboru jest 15 dań głównych, 10 napojów i 5 deserów. Planujesz wybrać 3 dania główne, 2 napoje i 2 desery. Na ile sposobów możesz to zrobić?
- 17.10. Dany jest zbiór wszystkich cyfr.
- Ile jest liczb trzycyfrowych?
 - Ile jest liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach?
 - Ile jest liczb trzycyfrowych, w których powtarza się co najmniej jedna cyfra?
- 17.11. a) Na pewnej uczelni obowiązuje skala ocen: 2, 3, 4, 5. Egzamin nie jest zdany, gdy otrzymana z niego ocena jest równa 2. Czterech studentów tej uczelni stawilo się na egzamin. Na ile sposobów mogą im być wystawione noty, jeśli wiadomo, że wszyscy zdali egzamin?
- Każdej z 10 osób przyporządkowujemy:
 - dzień tygodnia, w którym się urodziła,
 - miesiąc, w którym się urodziła.
 Ile różnych wyników możemy otrzymać?
 - Alfabet Morse'a zbudowany jest z dwóch różnych elementów: kreski i kropki. Ile znaków pisarskich można utworzyć z tych elementów, jeśli każdy znak nie może posiadać mniej niż 3 i więcej niż 6 miejsc oznaczonych kropkami lub kreskami.
- 17.12. Dziesięć kaset wideo ustawiasz w kolejności na półce. Na ile sposobów możesz to zrobić, jeśli chcesz aby trzy kasety z filmami twojego ulubionego reżysera stały obok siebie?
- 17.13. Pięcioosobowa rodzina (rodzice, starsza córka i bliźniaki) ustawiają się do zdjęcia.
- Ile jest możliwych ustawień dla osoby rozróżniającej bliźniaki?
 - Ile jest możliwych ustawień zdaniem fotografa, dla którego bliźniaki są identyczne?

- 17.14. Przesądna studentka zawsze, kiedy tylko w dniu egzaminu dostawała z szatni numerki z choćby jedną cyfrą 2, prosiła o wymianę na inny bez dwójek. Jaki procent wszystkich 500 numerków w tej szatni stanowiły numerki „nieszczęśliwe” dla tej studentki?

18 Rachunek prawdopodobieństwa

- 18.1. a) Wszystkie ściany sześcianu o krawędzi równej 3 dm pomalowano, a następnie sześcian rozcięto na jednakowe sześciany o krawędzi 1 dm. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany sześcian:
- będzie miał trzy pomalowane ściany,
 - będzie miał tylko jedną pomalowaną ścianę,
 - nie będzie miał żadnej pomalowanej ściany.
- b) Zgodnie z najnowszymi badaniami 70% krasnoludków umie czytać, 40% krasnoludków umie pisać, natomiast 30% krasnoludków umie czytać i pisać.
- Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrany krasnoludek umie pisać ale nie umie czytać?
 - Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrany krasnoludek, ani nie umie pisać, ani nie umie czytać.
- 18.2. W klasie jest trzynaście dziewcząt i trzynastu chłopców. Wychowawca przydzielił uczniom losowo miejsca w trzynastu ławkach dwuosobowych tak, że w każdej ławce siedział po prawej stronie chłopak, a po lewej dziewczynka. Zuzia chciała koniecznie siedzieć z Jackiem. Oblicz prawdopodobieństwo, że marzenie Zuzi się spełni.
- 18.3. Grupa sześciu chłopców i trzech dziewcząt wybrała się do kina. Ponieważ nie mieli biletów, więc ustawili się w pojedynczej kolejce do kasy, przy czym ustawienie miało charakter losowy. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że między dwoma ustalonymi chłopcami stanęły w kolejce wszystkie dziewczęta i tylko one.
- 18.4. a) Drużyna siatkówki składa się z sześciu zawodników. Do kontroli antydopingowej wybiera się dwóch zawodników. Jakie jest prawdopodobieństwo, że kontroli poddany zostanie kapitan drużyny?
- b) Wśród 12 żarówek 4 są wadliwe. Wybrano losowo 3 żarówki. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że co najmniej jedna z nich jest dobra?
- c) Z 5 prętów, których długości są odpowiednio równe 1, 2, 3, 4, 5 jednostek długości, wybieramy losowo trzy. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że można z nich zbudować trójkąt prostokątny.
- 18.5. Z szuflady, w której znajdują się dwa batony Marsowe, trzy batony Słoneczne i pięć batonów Nieziemskich, mama na chybił trafił wyciąga trzy razy po jednym batonie i obdziela nimi po kolei Basię, Krzysia i Zosię. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że każde dziecko otrzyma baton innego rodzaju?
- 18.6. Na dwóch prostych równoległych obrano 9 punktów: na jednej z nich 4 punkty a na drugiej 5 punktów. Ze zbioru tych punktów losujemy jednocześnie trzy punkty. Oblicz prawdopodobieństwo, że są one wierzchołkami pewnego trójkąta.
- 18.7. a) W sposób losowy z wierzchołków sześcianu wybieramy dwa. Oblicz prawdopodobieństwo, że wyznaczony w ten sposób odcinek będzie krótszy od przekątnej sześcianu.
- b) Spośród wszystkich ścian ostrosłupa sześciokątnego wybieramy losowo trzy. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród wybranych ścian znajdzie się podstawa tego wielościanu?
- 18.8. Ze zbioru $\{1, \dots, 11\}$ losujemy jednocześnie trzy liczby. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej jednej liczby parzystej.
- 18.9. Ze zbioru cyfr $\{1, 2, 3, 5, 7\}$ układamy wszystkie możliwe liczby 3-cyfrowe o różnych cyfrach. Z liczb tych wybieramy losowo jedną. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będzie ona wielokrotnością liczby 65?
- 18.10. Ze zbioru cyfr $\{1, 4, 5, 9\}$ wybieramy trzy razy kolejno po jednej cyfrze bez zwracania i tworzymy z niej liczbę trzycyfrową rozpoczynając od setek. Oblicz prawdopodobieństwo, że uzyskana w ten sposób liczba będzie:
- a) parzysta,
 - b) większa od 333,
 - c) podzielna przez 9.

- 18.11. W pewnej grze rzuca się trzema kostkami i oblicza sumę oczek. Krupier twierdzi, że nie ma znaczenia, czy postawimy na sumę oczek równą 10 czy 9, ponieważ każdą z nich można użyć na 6 sposobów.
 $9 = 1 + 2 + 6 = 1 + 3 + 5 = 1 + 4 + 4 = 2 + 2 + 5 = 2 + 3 + 4 = 3 + 3 + 3$,
 $10 = 1 + 3 + 6 = 1 + 4 + 5 = 2 + 4 + 4 = 3 + 2 + 5 = 2 + 2 + 6 = 3 + 3 + 4$.
 Czy krupier ma rację? Odpowiedź uzasadnij.

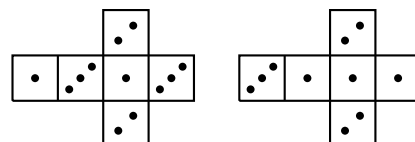
- 18.12. Z talii 52 kart losujemy jedną kartę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania asa lub karty koloru czarnego.

- 18.13. Krzyś rzuca dwa razy symetryczną kostką do gry i oblicza iloczyn wyrzuconych oczek. Jeśli iloczyn oczek należy do przedziału $\langle 12, 16 \rangle$, to Krzyś wygrywa. W pozostałych przypadkach przegrywa.
 a) Uzupełnij tabelę tak, aby przedstawiała wszystkie możliwe wyniki.

I / II	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4		
2	2	4	6			
3	3	6				
4	4	8				
5						
6						

- b) Podaj liczbę wyników sprzyjających wygranej Krzysia i oblicz prawdopodobieństwo wygranej.

- 18.14. Mamy dwie jednorodne kostki sześciennne, których siatki przedstawione są na rysunku.
 Rzucamy jednocześnie dwiema kostkami. Oblicz prawdopodobieństwo, że:



- a) iloczyn oczek będzie równy 9,
 b) na obu kostkach uzyskamy tę samą liczbę oczek,
 c) suma oczek nie przekroczy liczby 3.

- 18.15. Pewne przedsiębiorstwo ma trzy miejskie numery telefoniczne. Prawdopodobieństwo, iż w danej chwili korzysta się z danego numeru telefonu wynosi $\frac{3}{5}$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:
 a) co najmniej jeden numer jest wolny,
 b) dokładnie dwa numery są wolne.

- 18.16. a) Dwaj strzelcy równocześnie strzelają jeden raz do tarczy. Jeden z nich trafia zwykle do celu 7 razy na 10 strzałów, a drugi trafia 8 razy na 10 strzałów. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że przynajmniej jeden z nich trafi do celu?
 b) Strzelec trafia do tarczy z prawdopodobieństwem 0,9. Na każde 10 strzałów trafiających w tarczę dwa trafiają w dziesiątkę. Oblicz prawdopodobieństwo, że strzelając jeden raz strzelec trafi w „dziesiątkę”.

- 18.17. W każdym z trzech pojemników znajduje się po 10 losów, przy czym w pierwszym są 4 losy wygrywające, w drugim 5 wygrywających, a w trzecim 8. Sprawdź, przy którym z następujących wariantów losowania
 a) I - losujemy pojemnik, a z niego 3 losy,
 b) II - losujemy z każdego pojemnika po jednym losie,
 prawdopodobieństwo wylosowania trzech losów wygrywających jest większe.

- 18.18. W pudełku znajdują się żetony. Wśród nich jest 6 żetonów o nominale 5 zł oraz n żetonów o nominale 10 zł. Losujemy z pudełka dwa żetony. Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na wylosowaniu obu żetonów o nominale 10 zł jest równe $\frac{1}{2}$. Oblicz n .

- 18.19. Nauczycielka wf sporządziła zestawienie dotyczące wzrostu (w zaokrągleniu do 2 cm) i wagi (w zaokrągleniu do 2 kg) wszystkich dziewcząt klas pierwszych szkoły ponadgimnazjalnej.

168			1	2	3	2	
164			1	4	10	1	
162		1	3	15	6	1	
160	1	8	7	11	12		
158	1	2	6	4	8		
Wzrost [cm]	46	48	50	53	54	58	Waga [kg]

Określamy zdarzenia:

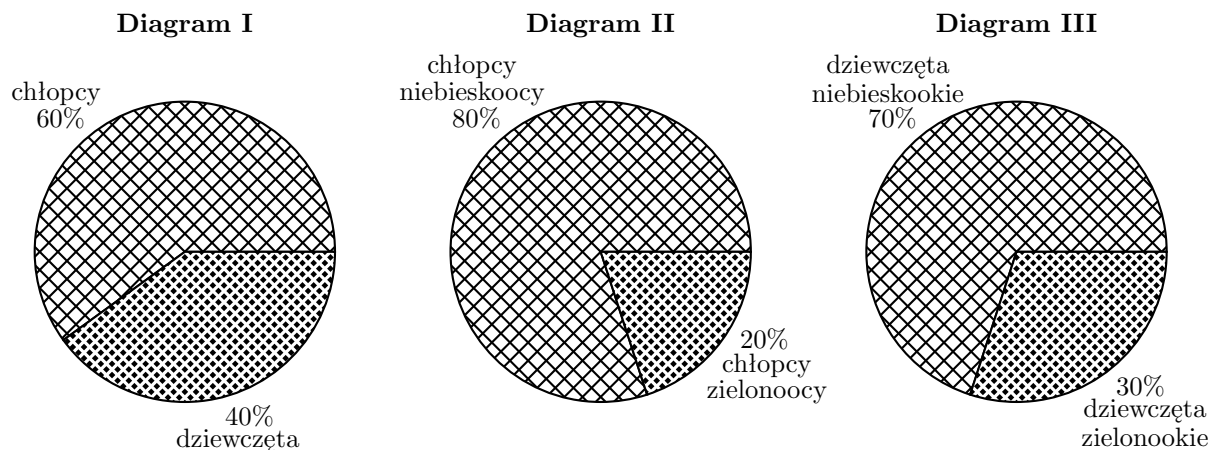
A - losowo spotkana uczennica klasy pierwszej będzie miała co najmniej 162 cm wzrostu,

B - losowo spotkana uczennica klasy pierwszej będzie ważyła co najwyżej 50 kg.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń: $A \cap B$, $A' \cap B$ i $A \cap B'$.

- 18.20. (R) Z talii 52 kart 5 razy losujemy jedną kartę i po każdym losowaniu zwracamy ją do talii i tasujemy. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że uda nam się w ten sposób trzykrotnie wylosować króla?

- 18.21. (R) W pewnej grupie młodzieży dane dotyczące płci oraz koloru oczu ilustrują diagramy: I, II i III.



Wybrano losowo jedną osobę z tej grupy. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ma ona zielone oczy?

- 18.22. (R) Tabela przedstawia liczbę uczniów wszystkich klas III pewnego liceum.

Klasa	Liczba wszystkich uczniów	Liczba chłopców
III a	30	10
III b	32	24
III c	25	15
III d	27	18

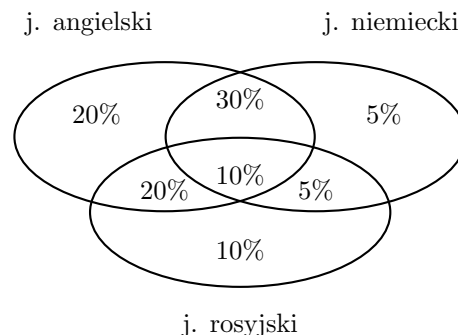
Spośród wszystkich klas trzech wybieramy losowo jedną klasę, a następnie z tej klasy jednego ucznia. Oblicz prawdopodobieństwo, że wybranym uczniem będzie dziewczyna.

- 18.23. (R) W szkatułce znajduje się 5 koralików i 1 perła.
 a) Losujemy ze szkatułki dwa przedmioty. Czy wylosowanie perły jest bardziej prawdopodobne od jej niewylosowania?
 b) Losujemy ze szkatułki trzy przedmioty. Czy wylosowanie wtedy perły jest bardziej prawdopodobne od jej niewylosowania?

- 18.24. (R) W urnie jest 6 kul, w tym 5 białych i jedna czarna. Adam i Jarek losują bez zwracania po jednej kuli. Przegrywa ten, kto pierwszy wyciągnie kulę czarną. Czy prawdopodobieństwo przegranej jest większe dla tego chłopca który rozpoczyna losowanie? Narysuj drzewo dotyczące tego modelu probabilistycznego i uzasadnij swoją odpowiedź.

- 18.25. (R) Wśród 100 losowo wybranych uczniów przeprowadzono ankietę. Zadano pytanie „których języków spośród angielskiego, niemieckiego, rosyjskiego uczyłeś się co najmniej przez 2 lata? Procentowe wyniki ankiety przedstawiono na diagramie. Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że osoba wybrana losowo spośród osób ankietowanych uczyła się języka angielskiego, N - uczyła się języka niemieckiego i R - języka rosyjskiego. Czy niezależne są zdarzenia:

- a) A i N,
 b) A i R.



- 18.26. (R) Ze zbioru liczb $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ losujemy kolejno dwie liczby bez zwracania. Sprawdź niezależność zdarzeń:
A - suma wylosowanych liczb jest większa od 8,
B - za pierwszym razem wylosujemy liczbę nieparzystą.
- 18.27. (R) Dane są prawdopodobieństwa warunkowe $P: P(A \setminus B) = \frac{2}{5}, P(A \setminus B') = \frac{1}{2}$ oraz $P(B) = \frac{1}{3}$. Oblicz $P(A)$ i $P(A \cap B)$.
- 18.28. (R) W urnie znajdują się kule białe i czarne, razem jest ich 10. Losujemy bez zwracania dwie kule. Prawdopodobieństwo wylosowania za drugim razem kuli białej, pod warunkiem że za pierwszym razem wylosujemy kulę czarną, jest równe $\frac{2}{3}$. Ile kul białych jest w urnie?
- 18.29. (R) Michał i Jarek grają w następującą grę. Każdy z nich rzuca raz swoją kostką. Jeżeli suma oczek na obu kostkach jest większa od 3 i mniejsza od 8, to wygrywa Michał, w przeciwnym wypadku wygrywa Jarek. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:
a) wygra Michał,
b) wygra Michał, pod warunkiem że Jarek wyrzucił 5.
- 18.30. (R) Wśród 300 zdających egzamin na informatykę było 200 absolwentów, którzy zdali matematykę na maturze na poziomie rozszerzonym, 75 na poziomie podstawowym i 25, którzy nie zdawali matematyki na maturze. Prawdopodobieństwo zdania egzaminu przez absolwenta jest następujące: dla tego, który zdał maturę na poziomie rozszerzonym równa się 0,9, na poziomie podstawowym 0,25, a dla tego, który nie zdawał matematyki na maturze równa się 0,1.
a) Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrany kandydat wśród 300 zdających, zdał pomyślnie egzamin.
b) Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrany kandydat zdał maturę z matematyki na poziomie rozszerzonym, jeśli wiadomo, że zdał on egzamin wstępny.
- 18.31. (R) W szpitalu na oddziale wewnętrznym przebywa rocznie średnio 2000 chorych. Wśród leczonych było 800 cierpiących na chorobę K_1 , 600 na chorobę K_2 , 400 na chorobę K_3 i 200 na chorobę K_4 . Prawdopodobieństwo pełnego wyleczenia z chorób wynosi 0,9, 0,8, 0,7 i 0,5. Oblicz prawdopodobieństwo, że:
a) losowo wybrany pacjent jest całkowicie wyleczony,
b) wypisany pacjent jest całkowicie wyleczony. Jakie jest prawdopodobieństwo, że cierpiał na chorobę K_2 ?
- 18.32. (R) Pewna firma ma cztery różne numery telefonów. Prawdopodobieństwo tego, że pojedynczy numer będzie w danej chwili zajęty jest równe $\frac{2}{3}$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:
a) co najmniej jeden numer będzie wolny,
b) dokładnie trzy numery będą wolne.
- 18.33. (R) Karol gra w szachy z siostrą. Oboje są równorzędnymi partnerami. Czy bardziej prawdopodobne jest, że Karol wygra pięć z siedmiu rozegranych partii, czy sześć partii z ośmiu?
- 18.34. (R) Prawdopodobieństwo trafienia do tarczy w pojedynczym strzale przez pewnego biathlonistę wynosi 0,8. Biatlonista oddaje serię 5 strzałów. Oblicz prawdopodobieństwo, że:
a) tarcza zostanie trafiona dokładnie cztery razy,
b) tarcza zostanie trafiona co najmniej jeden raz.
- 18.35. (R) Prawdopodobieństwo, że w danym dniu „świeci słońce” w miejscowości M wynosi $\frac{5}{6}$. Przyjeżdżamy na 14 dniowy urlop do M. Jakie jest prawdopodobieństwo, że „słońce będziemy mieli” dokładnie przez 10 dni.
- 18.36. (R) Krótki łańcuch choinkowy składa się z dwudziestu żarówek. Dla każdej z żarówek prawdopodobieństwo, że będzie działać przez co najmniej 300 godzin jest równe 0,9.
a) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w krótkim łańcuchu w ciągu 300 godzin przepali się co najwyżej jedna żarówka. W obliczeniach możesz przyjąć, że $(0,9)^{19} \approx 0,14$.
b) W skrzyni jest 6 łańcuchów krótkich i 4 łańcuchy długie. Do dekoracji choinki użyto cztery losowo wybrane łańcuchy. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że do dekoracji użyto dwóch łańcuchów krótkich i dwóch łańcuchów długich.

19 Funkcje potęgowe, wykładnicze i logarytmiczne

19.1. (R) Sporządź wykres funkcji:

- a) $f(x) = -|x + 4|^{\frac{1}{2}} + 2$
- b) $f(x) = -(x + 3)^{-1} - 2$
- c) $f(x) = (x - 2)^3 - 4$

19.2. (R) Wykonaj działania:

- a) $(4x^{-1} + 3x)(4x - 3x^{-1})$
- b) $(108^{\frac{1}{3}} + 64^{\frac{1}{3}} - 4^{\frac{1}{3}})2^{\frac{1}{3}}$
- c) $(\sqrt[3]{5} - 1)^3$
- d) $\frac{1}{\sqrt[3]{3-1}}$
- e) $\frac{4\sqrt[3]{2}}{\sqrt{8}} \left(\frac{1}{2}\right)^5$
- f) $\frac{3 \cdot 2^{2000} + 2^{2001}}{10^{1999}} \cdot 5^{2000}$
- g) $\frac{3^7 + 3^6}{3^6 + 3^5}$

19.3. (R) Przedstaw w postaci potęgi:

- a) $\frac{\sqrt{x}\sqrt{x}}{x^5}(x\sqrt{x})^3$
- b) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$
- c) $\sqrt{5 + \sqrt{5 + \sqrt{5}}}$

19.4. (R) Sprawdź, czy ciąg:

- a) $(\sqrt{5} - \sqrt{3} - 2, \sqrt{5} - 2, \sqrt{5} + \sqrt{3} - 2)$ jest ciągiem arytmetycznym,
- b) $(\sqrt{5} - 2, \frac{1}{\sqrt{5}-2}, 17\sqrt{5} + 38)$ jest ciągiem geometrycznym,
- c) $(16, 2^{x-1}, 4^{x-3})$ jest ciągiem geometrycznym.

19.5. (R) Rozwiąż równanie:

- a) $g(f(x)) = f(x)$, gdzie $f(x) = x - 2$, $g(x) = \sqrt{x + 2}$.
- b) $3\sqrt{x} - 2 = x$
- c) $\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} = 2$
- d) $\frac{x-1}{1+\sqrt{x}} = 4 - \frac{1-\sqrt{x}}{2}$
- e) $x^{-1,5} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

19.6. (R) Rozwiąż nierówność: $x^{\frac{1}{3}} + x^2 \leq 2$.

19.7. (R) Dane są funkcje: $f(x) = \sqrt{9 - 8x - x^2}$ oraz $g(x) = 3x - 3$.

- a) Wyznacz dziedzinę funkcji f .
- b) Rozwiąż równanie $f(x) = g(x)$.
- c) Rozwiąż nierówność $g(x) \cdot f(x) \geq 0$.

19.8. (R) Narysuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji f i g opisane wzorami: $f(x) = 2^{x-1}$ i $g(x) = |2x + 1|$ oraz na podstawie ich wykresów odczytaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = g(x)$.

19.9. (R) Wykonaj wykres funkcji $f(x) = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$ i podaj miejsca zerowe oraz zbiór wartości funkcji.

19.10. (R) Wyznacz liczbę naturalną n tak, aby liczba:

- a) 2^n była większa od 16^{10} , ale mniejsza od 8^{14} ,
- b) 3^n była niewiększa od 750 i niemniejsza niż 81.

19.11. (R) Dwa ciała poruszają się ruchem jednostajnym; pierwsze z prędkością $v_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2t-1} \frac{cm}{s}$, a drugie z prędkością

$v_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^{4-t} \frac{cm}{s}$, gdzie t oznacza czas liczony w sekundach od początku obserwacji tych ciał. Kiedy stosunek v_1 do v_2 jest mniejszy od $\frac{32}{243}$?

19.12. (R) Rozwiąż równanie:

- a) $4^x - 8 \cdot 2^x = 0$
- b) $5^{x-1} - 5 \cdot 2^x = 5^{x-2} + 5 \cdot 2^{x-2}$
- c) $7^{x-2} \cdot 16^x = 2^{3x+2}$
- d) $3^{x+2} - 3^x = 72$
- e) $5^x + 5^{3-x} = 30$
- f) $9 \cdot 4^{\frac{1}{x}} + 5 \cdot 6^{\frac{1}{x}} = 4 \cdot 9^{\frac{1}{x}}$

19.13. (R) Rozwiąż nierówność:

- a) $25 \cdot (0,2)^{x^2} < 5^x$
- b) $1 < 2^{x^2} \leq 2^x$
- c) $16^x - 4^x \leq 0$
- d) $4^x + 2^{x+1} \leq 15$
- e) $6^x \leq 11^x$
- f) $2^{x+2} - 2^x < 48$

19.14. (R) a) Dla jakich wartości x określone jest wyrażenie: $\sqrt{6^x + 6^{2-x} - 37}$?

b) Dla jakich wartości x funkcja $f(x) = \frac{\sqrt{8-2^x}}{\log x}$ jest określona?

c) Określ dziedzinę funkcji: $f(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^x - 4} + \frac{1}{\sqrt{27-3^x}}$.

19.15. (R) Rozwiąż nierówność: $h(g(x)) \geq \frac{1}{16}$, jeżeli $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ i $g(x) = x^2 - 5$.

19.16. (R) Wyznacz największą liczbę całkowitą spełniającą nierówność:

- a) $\frac{1}{2^x-1} < \frac{1}{2^x+1}$
- b) $4^x - 4^{x-1} + 4^{x-2} - 4^{x-3} + \dots < 1$

19.17. (R) Rozwiąż układ równań: $\begin{cases} 3^x \cdot 5^{y+1} = 9 \\ 3^{x-2} + 5^{y+2} = 6. \end{cases}$

19.18. (R) Nie korzystając z kalkulatora, oblicz:

- a) $\log_{\frac{1}{9}} \frac{\sqrt[3]{3}}{3}$
- b) $9^{6\log_{81} 2 + \log_3 2}$
- c) $\log_{0,25} 27 \cdot \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{8}$

19.19. (R) Uporządkuj liczby od najmniejszej do największej: $9^{\log_3 4 + \log_{\frac{1}{3}} 2}$, $4^{\sqrt{3}}$, $12 + \log_2 \frac{1}{16}$, $8^{\sqrt{2}}$.

19.20. (R) Wiemy, że $\log_2 5 = a$. Wyznacz $\log_{25} 8$.

19.21. (R) Sprawdź, czy funkcje $f(x) = 2\log_3 x$ i $g(x) = \log_3 x^2$ są równe.

19.22. (R) Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \log_3(x-2) - 1$.

- a) Wyznacz dziedzinę i oblicz miejsce zerowe funkcji f .
- b) Narysuj wykres funkcji $y = |f(x)|$ i rozwiąż graficznie nierówność $|f(x)| > 1$.

19.23. (R) Wyznacz dziedzinę funkcji:

- a) $y = \log_{(x-1)}(3-x)$
- b) $y = \log_{\frac{1}{3}} \log_5 |x+1|$

19.24. (R) Określ dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{\log_{0,5}(x^2 - 5x + 4) - \log_{0,5}(5x - 5) + 1}$.

19.25. (R) Dla jakiej wartości parametru m funkcja:

- a) $f(x) = \log_{(m-2)} x$ jest malejąca?
- b) $f(x) = \log_{(m-2)}(-x)$ jest malejąca?
- c) $f(x) = \log_{(m^2-1)} x$ jest rosnąca?

19.26. (R) Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \sqrt{2\log_{0,5} x + 8}$.

- a) Określ dziedzinę tej funkcji.
- b) Rozwiąż równanie $\sqrt{2\log_{0,5} x + 8} = \log_{0,5} x$.

19.27. (R) Dla jakich argumentów x funkcja $f(x) = \log_{0,1}|x - 8|$ przyjmuje wartości dodatnie?

19.28. (R) Dana jest funkcja $f(x) = \log_2 x$.

- a) Oblicz $\frac{f(12) - f(2)}{f(3)}$.
- b) Podaj zbiór rozwiązań nierówności $f(x) < 0$.
- c) Rozwiąż równanie $2f^2(x) - 5f(x) + 2 = 0$.

19.29. (R) Zaznacz na płaszczyźnie w układzie współrzędnych zbiór:

$$F = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge \log_{\frac{1}{3}}(|x| - 2) \geq -2 \wedge |y| - 5 \leq 0\}$$

oraz napisz równania osi symetrii otrzymanej figury.

19.30. (R) Rozwiąż równanie:

- a) $\log(x + 1, 5) = -\log x$
- b) $\log_2 x + 1 = 2\log_x 2$
- c) $\log_x(3x + 4) = 2$
- d) $\frac{2}{\log_3 x - 1} + 1 = 6\log_x 3$
- e) $x^{1 + \log_2 x} = 4$

19.31. (R) Rozwiąż nierówność:

- a) $\log_3|x + 3| < 0$
- b) $\log_2(\log_{\frac{1}{5}}(x - 1)) > 1$
- c) $\log_x(x + 2) \leq 2$
- d) $\log^3 2x - \log^2 2x \geq 0$
- e) $\log_{0,5}(x + 4) - \log_{0,5}(3x - 1) \leq 0$

19.32. (R) Niech $A = \{x \in \mathbb{R} : \log_2(3x - 1) < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x^3 \geq 4x\}$. Wyznacz zbiory: A , B , $A \cap B$.

19.33. (R) Rozwiąż równanie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\log_2 4x + \log_2^2 4x + \log_2^3 4x + \dots + \log_2^n 4x) = 1 + \frac{1}{2} \log_2 x.$$

19.34. (R) Dany jest nieskończony ciąg geometryczny, którym $a_1 = \log_3 x$ i iloraz $q = \log_3 x$. Oznaczmy przez $f(x)$ sumę tego ciągu.

- a) Wyznacz dziedzinę funkcji f .
- b) Rozwiąż nierówność $f(x) > 1$.

19.35. (R) Rozwiąż równanie: $1 + \log_8 x + \log_8^2 x + \log_8^3 x + \dots = 3$.

19.36. (R) Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} 3x + y = 8^{\log_8 12} \\ x^2 + y^2 - 2xy = \log_2 144 - \frac{1}{2} \log_2 81 \end{cases}$$

19.37. (R) Dany jest ciąg (x_n) , o wyrazach dodatnich, w którym

$$\begin{cases} \log_2 x_1 = -2 \\ \log_2 x_n - \log_2 x_{n-1} = -2, \text{ dla } n \in \mathbb{N}_+ \setminus \{1\} \end{cases}$$

Wykaż, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{3}.$$

19.38. (R) Rozwiąż nierówność $\frac{2+m^{2x}}{1-m^x} > -6$ przy założeniu, że wartość parametru m należy do przedziału $(0, 1)$.

20 Rachunek pochodnych

20.1. (R) Oblicz granicę funkcji:

- a) $f(x) = \frac{x^3-3x-2}{3x^2-4x-4}$ w punkcie $x_0 = 2$,
- b) $f(x) = \frac{3x^2-5x-2}{x^2-4}$ w punktach $x_0 = 2$, $x_0 = -2$ oraz przy $x \rightarrow \infty$,
- c) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{6-2x}$ w punkcie $x_0 = 3$,
- d) $f(x) = \sqrt{x^2+2x} - x$ przy $x \rightarrow \infty$,
- e) $f(x) = \frac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$ w punkcie $x_0 = 1$,
- f) $f(x) = \frac{64-x^3}{x-4}$ w punkcie $x_0 = 4$,
- g) $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ przy $x \rightarrow -\infty$,
- h) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$ przy $x \rightarrow \infty$,
- i) $f(x) = \frac{\sin 3x}{4x}$ w punkcie $x_0 = 0$.

20.2. (R) Wyznacz równania asymptot funkcji:

- a) $f(x) = \frac{3x-6}{2x+2}$
- b) $f(x) = \frac{x^2+4x+4}{1-x}$

20.3. (R) Dana jest funkcja $f(x) = x^4$.

- a) Oblicz wartość wyrażenia $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ dla $h = 0, 1$.
- b) Do jakiej liczby dąży wartość wyrażenia $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$, gdy wartość h dąży do zera?

20.4. (R) Oblicz granicę funkcji

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}.$$

20.5. (R) a) Dla jakiej wartości parametru k zachodzi równość:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - (k+1)x + k}{x^2 - 1} = 5.$$

b) W zależności od parametru $k \in \mathbb{R}$ oblicz granicę funkcji

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{kx+1}}{x}.$$

20.6. (R) Naszkicuj wykres pewnej funkcji f , która spełnia następujące warunki:

- a) dziedziną jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$,
- b) jest ciągła w swojej dziedzinie,
- c)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$$

20.7. (R) a) Zbadaj ciągłość funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-2x^2+3x+2}{x-2}, & x \neq 2 \\ -5, & x = 2 \end{cases}$$

b) Wykonaj wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq 0 \\ m-x, & x > 0 \end{cases}$ dla tej wartości parametru m , dla której funkcja f jest ciągła.

c) Niech

$$f(x) = \begin{cases} x-3, & x \geq 2 \\ mx+1, & x < 2 \end{cases}$$

Wyznacz wartość parametru m tak, aby funkcja była ciągła. Dla wyznaczonej wartości parametru m :

- sporządź wykres funkcji,
- zapisz wzór funkcji z użyciem wartości bezwzględnej.

20.8. (R) Trzy walce, każdy o wysokości 5 m o promieniach podstaw odpowiednio równych: 3 m, 2 m, 1 m, postawiono jeden na drugim.

a) Wyraż pole przekroju bryły utworzonej przez te walce, płaszczyzną równoległą do podstaw walców jako funkcję odległości tego przekroju od płaszczyzny dolnej podstawy największego walca.

b) Czy ta funkcja jest ciągła?

c) Sporządź jej wykres.

20.9. (R) Wyznacz pochodną funkcji:

a) $f(x) = -3x^2 + x$ dla $x_0 = 0$,

b) $f(x) = (x - 2)^2(1 - x^2)$,

c) $f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{3x - x^2}$,

d) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x}$,

e) $f(x) = \cos^2 x$,

f) $f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$,

g) $f(x) = \sqrt{7x^2 + x}$,

h) $f(x) = \operatorname{tg}(1 - x^2)$.

20.10. (R) a) Dana jest funkcja określona wzorem $f(x) = 3x^2 - x + 4$ oraz punkt $M = (1, y_0)$ należący do wykresu tej funkcji. Wyznacz współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji w punkcie M .

Wyznacz równanie tej stycznej.

b) Wyznacz współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \frac{3x^2 - 1}{1 - x^2}$ w $x_0 = 2$.

c) Wyznacz kąt, który styczna do wykresu funkcji w punkcie o odciętej $x_0 = \frac{1}{2}$ tworzy z dodatnią półosią osi OX, gdy $f(x) = 2\sqrt{3}x^4$.

d) Napisz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = 8x - x^4$ w punktach jej przecięcia z osią OX.

e) Dla jakiej wartości parametru m prosta $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}$ jest styczna do wykresu funkcji $f(x) = x^4 + m$.

20.11. (R) Na wykresie funkcji $f(x) = x^2 - x + 3$ wyznacz taki punkt P , w którym styczna do tego wykresu jest równoległa do prostej o równaniu $y = 7x - 2$.

20.12. (R) Dana jest funkcja $f(x) = \frac{ax+b}{x-2}$, o której wiadomo, że $f(3) = 5$ i $f'(1) = -3$.

a) Wyznacz wzór tej funkcji i określ jej dziedzinę.

b) Wyznacz miejsca zerowe.

20.13. (R) a) Uzasadnij dlaczego funkcja $f(x) = 3x + 2\sin x$ nie posiada ekstremum.

b) Dla jakiej wartości parametru m liczba $x_0 = 1$ jest miejscem zerowym pochodnej funkcji

$f(x) = x^3 - 2mx^2 + 2$.

c) Zbadaj monotoniczność funkcji $f(x) = 5x + \cos 4x$.

20.14. (R) Wyznacz parametry a, b wiedząc, że funkcja $y = x^3 + ax + b$ w punkcie $x = 3$ osiąga ekstremum równe 1.

20.15. (R) Wyznacz zbiór wartości funkcji o wzorze $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ określonej na przedziale $\langle 2, 3 \rangle$.

20.16. (R) Dla jakich wartości parametru m funkcja określona wzorem $f(x) = \frac{1}{3}mx^3 - 2x^2 + (m-3)x + 1$ jest funkcją rosnącą w $\mathbb{R}$.

20.17. (R) Funkcja f dana jest wzorem $f(x) = x^3 - 6x^2 + c$ dla $x \in \mathbb{R}$ i $c \in \mathbb{R}$.

a) Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji f w przedziale $\langle -1, 3 \rangle$ wiedząc, że $f(0) = 8$.

b) Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f .

20.18. (R) Dana jest funkcja $f(x) = x^3 - px^2 + 5x - 2$.

a) Znajdź taką wartość parametru p , dla której funkcja f osiąga minimum w punkcie $x = 5$.

b) Dla wyznaczonego p podaj przedziały monotoniczności funkcji f .

- 20.19. (R) Funkcja $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x - 2$ przyjmuje dla argumentu p wartość 8, a jej pochodna ma dla argumentu p wartość 0.
- Oblicz p .
 - Wyznacz ekstrema funkcji f .
 - Podaj przedziały monotoniczności funkcji f .
- 20.20. (R) Zbadaj monotoniczność i ekstrema funkcji $f(x) = 6x^2 - x^3$.
- 20.21. (R) Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$.
- 20.22. (R) Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji określonej wzorem $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$.
- 20.23. (R) Funkcja f zmiennej rzeczywistej x jest określona wzorem $f(x) = x^2 - mx$.
- Dla jakich wartości m , funkcja f jest malejąca w przedziale $(-1, 1)$?
 - Dla $m = 3$ wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji f w przedziale $\langle 1, 4 \rangle$.
- 20.24. (R) Dla jakiej wartości parametru k funkcja $f(x) = x^3 - 4x^2 + kx$ osiąga ekstremum w punkcie $x_0 = 1$? Wyznacz drugie ekstremum i określ rodzaj każdego z nich.
- 20.25. (R) Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji:
- $f(x) = x^4 + x^3 - 8x^2 - 12x + 1$ w $\langle 0, 3 \rangle$,
 - $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 8}{2(x-2)}$ w $\langle -3, 1 \rangle$.
- 20.26. (R) Okno ma kształt prostokąta zakończonych na górze półkolem. Jaka powinna być podstawa prostokąta, żeby przy obwodzie okna wynoszącym 2 m powierzchnia okna była największa?
- 20.27. (R) Jaki prostokąt o obwodzie 36 cm ma najkrótszą przekątną?
- 20.28. (R) Dana jest funkcja f o wzorze $f(x) = -x^2 + 4x$ i styczna do jej wykresu w punkcie M . Trapez jest ograniczony tą styczną i prostymi o równaniach: $x = 0$, $y = 0$ oraz $x = 2$. Jakie powinny być współrzędne punktu M , aby pole tego trapezu było najmniejsze?
- 20.29. (R) Suma długości wszystkich krawędzi graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa 12. Jaka powinna być długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa, aby jego objętość była maksymalna?
- 20.30. (R) Przez punkt $P = (-1, 4)$ prowadzimy proste przecinające układ współrzędnych w punktach $A = (x, 0)$, $B = (0, y)$, przy czym $x < 0$ i $y > 0$. Wyznacz równanie tej z nich, dla której suma odległości punktów A i B od początku układu współrzędnych jest najmniejsza.