1. **a)** Podnosząc liczbę dodatnią $3-\sqrt{5}$ do kwadratu otrzymamy

$$(3-\sqrt{5})^2 = 14-6\sqrt{5}.$$

Stąd otrzymujemy ciekawą równość

$$\sqrt{14-6\sqrt{5}} = 3-\sqrt{5}.$$

Zaproponuj analogiczną rowność dotyczącą liczby $\sqrt{11+4\sqrt{7}}$. Uzasadnij zaproponowaną równość.
b) Pokażemy, że liczby $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ i $2+\sqrt{3}$ są równe, czyli, że $\frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}{2+\sqrt{3}} = 1$.
Najpierw rozszerzymy ułamek, żeby usunąć niewymierność z mianownika:

$$\frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{(7+4\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^2}}{4-3} = \sqrt{(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})} = \sqrt{49-48} = 1.$$

Pokaż podobnie, że $\sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{5}-1$.

2. Istnieje wygodny sposób szybkiego podnoszenia do kwadratu liczb dwucyfrowych kończących się cyfrą 5:
$35^2 = 100\cdot 3\cdot 4 + 25 = 1225$,
$75^2 = 100\cdot 7\cdot 8 + 25 = 5625$,
który wynika z następującego rozumowania:

$$(10a+5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = 100a(a+1) + 25.$$

Znajdź sposób szybkiego podnoszenia do kwadratu liczb złożonych z całości i $\frac{1}{2}$ i uzasadnij go. Oblicz w ten sposób $\left(4\frac{1}{2}\right)^2$ oraz $\left(9\frac{1}{2}\right)^2$.

3. Aby wyznaczyć wszystkie pary (x,y) liczb całkowitych spełniające równanie: $xy = x-y+3$, można postąpić następująco:
krok 1. Najpierw przekształcamy to równanie do postaci: $(xy-x)+y = 3$
krok 2. Następnie z pierwszego składnika sumy po lewej stronie tego równania, czyli z nawiasu, wyłączamy wspólny czynnik przed nawias a drugi składnik sumy uzupełniamy do wyrażenia, które występuje w nawiasie tak, by równania pozostały równoważne:

$$x(y-1) + (y-1) = 3-1.$$

krok 3. Lewą stronę otrzymanego równania zapisujemy w postaci iloczynowej przez wyłączenie wspólnego czynnika $(y-1)$ przed nawias:

$$(y-1)(x+1) = 2.$$

krok 4. Ponieważ lewa strona tego równania jest iloczynem dwóch czynników całkowitych, więc jego prawą stronę, czyli liczbę 2 również przedstawiamy w postaci iloczynu dwóch liczb całkowitych:

$$(y-1)(x+1) = 2 = 1\cdot 2 = 2\cdot 1 = (-1)\cdot(-2) = (-2)\cdot(-1).$$

krok 5. Porównujemy obie strony rownania i zapisujemy je w postaci alternatywy czterech układów równań (bo tyle otrzymaliśmy rozkładów liczby 2 w postaci iloczynu liczb całkowitych):
$[(x+1)(y-1) = 2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left[\begin{cases} x+1=1 \\ y-1=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x+1=2 \\ y-1=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x+1=-1 \\ y-1=-2 \end{cases} \vee \begin{cases} x+1=-2 \\ y-1=-1 \end{cases}\right]$
krok 6. Rozwiązujemy powyższe układy równań:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-3 \\ y=0 \end{cases}$$

krok 7. Na koniec wyciągamy wniosek, że jedynymi parami liczb całkowitych spełniającymi wyjściowe równanie są pary liczb: $(0,3),(1,2)(-2,-1),(-3,0)$.
Postępując analogicznie, wyznacz wszystkie pary liczb całkowitych spełniające równanie: $xy = 2x-y+5$.

4. Dany jest algorytm (Euklidesa) obliczania $NWD(a,b)$ i $NWW(a,b)$:
niech $a = 22991$ i $b = 19667$,

$$22991 > 19667$$
$$\Downarrow$$
$$22991 = 1 \cdot 19667 + 3324$$
$$19667 = 5 \cdot 3324 + 3047$$
$$3324 = 1 \cdot 3047 + 277$$
$$3047 = 11 \cdot 277 + 0$$
$$\Downarrow$$
$$NWD(22991, 19667) = 277$$
$$NWW(22991, 19667) = \frac{22991 \cdot 19667}{277} = 1632361.$$

Korzystając z podanego algorytmu oblicz:

$$NWD(1615, 2618) \quad i \quad NWW(1615, 2618)$$

5. Wiadomo, że wielomian określony wzorem $W(x) = x^4 + 1$ nie ma pierwiastków rzeczywistych, bo dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ wyrażenie $x^4 + 1$ przyjmuje wartości dodatnie. Można go jednak rozłożyć na iloczyn czynników nierozkładalnych stopnia drugiego w następujący sposób:
• najpierw zapisujemy wyrażenie $x^4 + 1$ w postaci sumy kwadratów: $(x^2)^2 + 1^2$;
• następnie uzupełniamy tę sumę do pełnego kwadratu (jak poniżej):

$$(x^2)^2 + 1^2 = (x^2)^2 + 2x^2 + 1^2 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2;$$

• otrzymaną różnicę $(x^2 + 1)^2 - 2x^2$ zapisujemy w postaci różnicy kwadratów:

$$(x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2;$$

• stosujemy wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów:

$$(x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = (x^2 + 1 - \sqrt{2}x)(x^2 + 1 + \sqrt{2}x);$$

• i otrzymujemy rozkład wielomianu $W(x)$ na iloczyn czynników nierozkładalnych:

$$W(x) = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1).$$

• Postępując analogicznie, rozłóż na czynniki nierozkładalne wielomian $Q(x) = x^4 + 9$.

6. Sumę kolejnych liczb nieparzystych od 1 do 999, tzn. sumę

$$S = 1 + 3 + ... + 995 + 997 + 999$$

można obiczyć grupując składniki parami:

$$S = (1 + 999) + (3 + 997) + ... + (499 + 501),$$

tak, że suma liczb każdej pary wynosi 1000. Par jest 250, bo składników było 500, stąd:

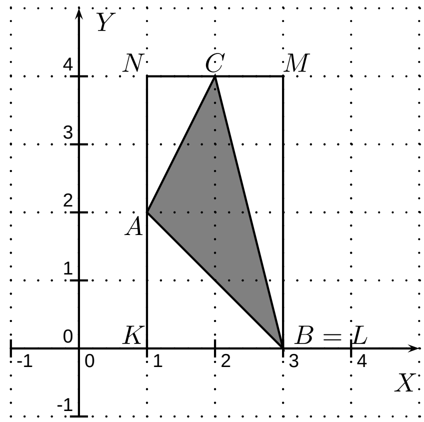
$$S = 250 \cdot 1000 = 250000.$$

Analogicznie oblicz sumę:

$$S = 5 + 10 + ... + 990 + 995 + 1000.$$

7. *„Liczba naturalna jest podzielna przez 36, gdy jest podzielna przez 4 i jest podzielna przez 9".* Np. Liczba 187524 jest podzielna przez 36, bo jest podzielna przez 9, gdyż jej suma cyfr $1+8+7+5+2+4=27$ jest podzielna przez 9 oraz jest podzielna przez 4, bo liczba utworzona z dwóch ostanich cyfr, czyli liczba 24 jest podzielna przez 4.
   a) Wykorzystując podaną zasadę podzielności, sprawdź, że liczba 24110352 jest podzielna przez 36.
   b) Podaj, jaką cyfrą powinno zastąpić się X, aby liczba 51403X8 była podzielna przez 36.
   c) Uzasadnij, że liczby naturalne postaci 10^n+8, gdzie n jest liczbą naturalną większą od 1, są podzielne przez 36.

8. Pole trójkąta o wierzcholkach $A=(1,2)$, $B=(3,0)$, $C=(2,4)$ można obliczyć stosując następującą metodę:
   - zaznaczamy w układzie współrzędnych punkty ABC;
   - rysujemy prostokąt $KLMN$ w sposób przedstawiony na rysunku (odpowiednie boki prostokąta mają być równoległe do osi układu współrzędnych);
   - odczytujemy długości odpowiednich odcinków:

   $|KL|=2,\ |LM|=4,\ |AK|=2,\ |MC|=1,\ |CN|=1,\ |NA|=2;$

   - obliczamy pole prostokata: $P_{KLMN}=|KL|\cdot|LM|=2\cdot 4=8;$
   - obliczmy pola odpowiednich trójkątów prostokątnych:

$$P_{\triangle AKL}=\frac{1}{2}|AK|\cdot|KL|=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2$$

$$P_{\triangle LMC}=\frac{1}{2}|LM|\cdot|MC|=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 1=2$$

$$P_{\triangle CNA}=\frac{1}{2}|CN|\cdot|NA|=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2=1$$

   - od pola prostokąta odejmujemy sumę pól trójkątów:

$$P_{\triangle ABC}=8-(2+2+1)=3[j^2].$$

   Stosując opisaną wyżej metodę, oblicz pole trójkąta o wierzchołkach

$$A=(1,0),\ B=(5,1),\ C=(3,4).$$

9. (R) Korzystając z równości $\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$, można obliczyć następującą granicę:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{(n-1)\cdot n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1$$

   Wykaż równość $\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+2}=\frac{1}{n(2n+2)}$, a następnie, korzystając z niej, oblicz granicę:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 6}+\frac{1}{3\cdot 8}+...+\frac{1}{n\cdot(2n+2)}\right).$$