

1. a) Podaj pięć wyrazów ciągu:

$$a_n = \sqrt{n^2 + n}, \quad b_n = \frac{n-2}{(n+1)!}, \quad c_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & \text{dla } n \text{ nieparzystego} \\ 2, & \text{dla } n \text{ parzystego} \end{cases}$$

- b) Które z wyrazów ciągu są równe zero:

$$a_n = \frac{1 + (-1)^n}{2n-1}, \quad b_n = (n^2 - 1)(n^2 - 5n + 6)$$

- c) Dany jest ciąg $a_n = n^2 - 6n$. Które wyrazy ciągu są mniejsze od 10?

- d) Zbadaj monotoniczność ciągu:

$$a_n = 2n^2 - 3n + 1, \quad b_n = \sin \frac{\pi}{2} n, \quad c_n = -\sqrt{n+4}, \quad d_n = \frac{2+4+6+\dots+2n}{n^2}$$

2. Sprawdź, czy dany ciąg jest:

- a) arytmetyczny: $a_n = \frac{n}{n+1}$,

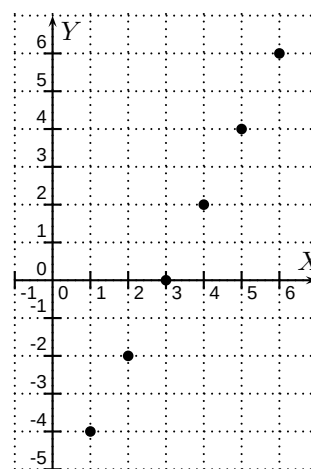
- b) geometryczny, gdy $b_n = (a_n)^2$ i $a_n = 3 \cdot 2^n$ oraz czy ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym.

3. Na rysunku przedstawiono część wykresu pewnego nieskończonego ciągu arytmetycznego (a_n) .

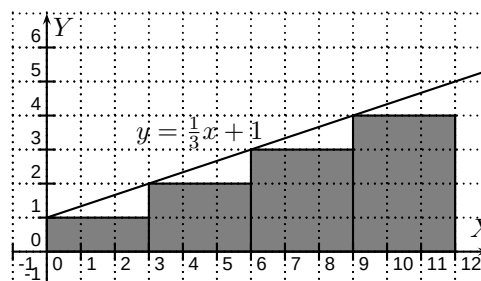
- a) Na podstawie wykresu tego ciągu odczytaj jego pierwszy wyraz i różnicę.

- b) Podaj wzór na ogólny wyraz tego ciągu.

- c) Niech $b_n = -\frac{1}{2}n^2$ będzie wyrazem ogólnym ciągu (b_n) . Dla jakich wartości n , $a_n = b_n$?

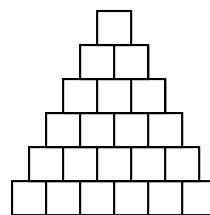


4. Oblicz pole figury złożonej ze stu prostokątów, które powstały w sposób pokazany na rysunku.



5. W nieskończonym ciągu arytmetycznym czwarty wyraz jest równy 17, a suma wyrazów trzeciego i szóstego 39. Wyznacz różnicę i pierwszy wyraz tego ciągu.
6. Wyznacz liczbę składników w sumie $2 + 5 + 8 + 11 + \dots + 449$ i oblicz tę sumę.
7. Pewna figura o polu równym 270 cm^2 składa się ze skończonej liczby prostokątów, których pola tworzą ciąg arytmetyczny. Pole najmniejszego prostokąta wynosi 12 cm^2 , a największego 48 cm^2 .
- a) Z ilu prostokątów składa się figura?
- b) Oblicz pole trzeciego prostokąta tej figury.
8. Między liczby $11\frac{4}{5}$ i $15\frac{3}{10}$ wstaw cztery liczby x, y, z, t tak, aby liczby $11\frac{4}{5}, x, y, z, t, 15\frac{3}{10}$ tworzyły ciąg arytmetyczny.

9. Krzyś postanowił wybudować wieżę z klocków, według następującego szkicu projektu. Ma do dyspozycji 210 sześciennych klocków o wysokości 4 cm. Jak wysoką wieżę może zbudować?



10. Średni zarobek pięciu pracowników pewnej firmy wyniósł w maju 1560 złotych, a najwyższa pensja wyniosła 1800 złotych.
- Oblicz wysokości pensji tych pracowników w maju jeśli wiadomo, że tworzyły one ciąg arytmetyczny.
 - W czerwcu nie pracował już pracownik, który w maju zarabiał najmniej i wtedy pensje pozostałych czterech wzrosły o jednakową kwotę. Ile zarabiał każdy z pozostałych pracowników w czerwcu, jeśli wiadomo, że kwota przeznaczona na wypłatę pensji była w czerwcu taka sama jak w maju?
11. Przedstaw w tabeli liczby mieszkańców miasta w ciągu 3 lat, zakładając, że miasto w 2004 roku ma 200 tysięcy mieszkańców i liczba ta co roku będzie malała o 5%.

Rok	2004	2005	2006	2007
Liczba mieszkańców	200000			

12. W tabeli przedstawiono populację pewnej bakterii w milionach sztuk, która rośnie w postępie geometrycznym.

n - liczba tygodni	1	2	3
a_n - liczba bakterii	100	150	225

- O ile procent wzrasta ta populacja z tygodnia na tydzień?
 - Wyznacz wzór ogólny ciągu (a_n) .
 - Czy ta populacja po 7 tygodniach przekroczy 1000 mln sztuk?
13. Jasio w pierwszym miesiącu nauki opanował 500 słów. W każdym kolejnym miesiącu opanowywał o 20% słów mniej niż w miesiącu poprzednim.
- Ile słów opanuje w trzecim miesiącu nauki?
 - Ile słów Jasio opanuje po czterech miesiącach nauki?
14. Huśtawkę dziecięcą najpierw odciągnięto do punktu P , a następnie puszczono. W pierwszym wahnięciu huśtawka pokonała drogę długości 2 m do punktu Q , a w każdym następnym wahnięciu poruszała się po łuku, którego długość za każdym razem malała do $\frac{4}{5}$ długości łuku z poprzedniego wahnięcia. Jaką długość łuku zatoczyła huśtawka w piątym wahnięciu, a jaką długość drogi pokonała ona do tego czasu od momentu puszczenia?
15. Piłka upuszczona z wysokości 6,25 m, odbijając się od ziemi, osiągała za każdym razem wysokość wynoszącą $\frac{3}{5}$ poprzedniej.
- Jak wysoko wzniosła się piłka po trzecim odbiciu się od ziemi?
 - Ile metrów przebyła piłka od momentu upuszczenia do chwili zetknięcia się z ziemią po raz czwarty?
16. Z dwóch punktów A i B oddległych od siebie o $111\frac{1}{5}$ m wyruszają jednocześnie dwa ciała. Pierwsze z nich przebywa w pierwszej sekundzie drogę długości 30 m, a w każdej następnej o 1 m więcej niż w poprzedniej. Drugie w pierwszej sekundzie przebywa drogę długości 5 m, a w każdej następnej $x\%$ tego, co w poprzedniej. Oblicz x , wiedząc, że ciała spotkały się po trzech sekundach.
17. Liczby $m, 4, n$, w podanej kolejności, są trzema początkowymi wyrazami ciągu geometrycznego, gdzie

$$m = \frac{(2^2)^3 \cdot 2^{-5}}{2^8 : 2^{10}}, \quad n = \left(2^{\frac{1}{2}} - 1\right)^2 + 2^{\frac{3}{2}} - 1.$$

- Oblicz sześć początkowych wyrazów tego ciągu.
- Wyznacz taką liczbę p , aby m, n, p , w podanej kolejności tworzyły ciąg arytmetyczny.

18. Pan X umówił się z panem Y, że będzie mu wypłacał codziennie przez trzy tygodnie pieniądze, przy czym pierwszego dnia 10 zł, drugiego 20 zł, trzeciego 30 zł, czwartego 40 zł itd. W zamian pan Y wypłaci mu pierwszego dnia 1 grosz, drugiego 2 grosze, trzeciego 4 grosze, czwartego 8 groszy itd. Który z tych panów zyska na umowie i ile?
19. a) Cena płaszcza była 4 razy podwyższana o 5%. Jaka jest obecna cena płaszcza, jeżeli przed pierwszą podwyżką kosztował on 400 zł?
b) Kapitał w wysokości 1000 zł złożono w banku na procent składany. Jaka będzie wielkość kapitału po 6 latach przy oprocentowaniu rocznym wynoszącym 5%.
c) Do jakiej kwoty wzrośnie kapitał 500 zł złożony na 5 lat, jeżeli roczna stopa wynosi 4%, a odsetki są kapitalizowane co pół roku.
d) Na lokatę roczną, której oprocentowanie wynosi 4,5% w skali roku, wpłacono 5000 zł. Oblicz stan tej lokaty po dwóch latach oszczędzania, jeżeli od nalicznych odsetek będzie pobierany co roku podatek w wysokości 20%.
e) Inwestor planuje uzyskać w banku kredyt, który zamierza spłacić po czterech latach. Taki kredyt w banku A jest oprocentowany 12% w skali roku, a odsetki są dopisywane do długu co pół roku. Bank B oferuje oprocentowanie roczne 11% z roczną kapitalizacją odsetek, a przy zwrocie kredytu pobiera prowizję w wysokości 4% kwoty udzielonego kredytu. Oceń, która oferta jest korzystniejsza dla kredytobiorcy.
20. (R) Z ciągu liczb naturalnych $(1, 2, 3, 4, 5, \dots)$ wybrano 100 kolejnych takich liczb, z których każda ma tę samą własność, że jeżeli podzielimy ją przez 3, to otrzymamy resztę jeden. Wyznacz najmniejszą z nich, wiedząc, że suma wszystkich tych liczb jest równa 17950.
21. (R) Swobodnie spadające ciało w ciągu pierwszej sekundy przebyło drogę 4,9 m, a w ciągu każdej następnej sekundy o 9,8 m więcej niż we wcześniejszej.
a) Oblicz, ile metrów przebyło to ciało w 12 sekundzie.
b) Oblicz, ile metrów przebyło to ciało w ciągu 12 sekund.
22. (R) Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych, które nie dzielą się przez 3.
23. (R) Różnica między drugim a pierwszym wyrazem ciągu geometrycznego wynosi 5, zaś różnica między czwartym, a pierwszym wyrazem tego ciągu wynosi 35. Wyznacz pierwszy wyraz tego ciągu i jego iloraz.
24. (R) Na płaszczyźnie dany jest ciąg punktów $P_n = (0, n+1)$. Punkt $Q_n = (q_n, 0)$ jest punktem przecięcia z osią OX prostej przechodzącej przez punkty: $A = (1, 1)$ i P_n .
a) Wyznacz wzór ogólny ciągu (q_n) .
b) Zbadaj monotoniczność ciągu (q_n) .
c) Wyznacz granicę tego ciągu.
25. (R) a) Dane są ciągi: (a_n) , (b_n) , (c_n) określone wzorami:

$$a_n = \frac{3-5n}{n+1}, \quad b_n = \frac{4-n}{2n^2-1}, \quad c_n = n^2 - 5n + 1.$$

Oblicz granicę każdego z nich.

Wyznacz najmniejszy wyraz ciągu (c_n) .

b) Dany jest ciąg liczbowy $a_n = 3n^2 - 3n + 2$ określony dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}_+$.

Wykaż, korzystając z definicji monotoniczności ciągu, że ciąg (a_n) jest rosnący.

Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8n^6 + n}}{1 - a_n}$$

c) Ciąg (a_n) określony jest rekurencyjnie w następujący sposób $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n+1} \end{cases}$, dla $n \geq 1$.

Wyznacz wzór ogólny ciągu oraz oblicz granicę:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[a_n \left(\sqrt{n^2 - 7n} - \sqrt{4n^2 + 5n + 8} \right) \right]$$

26. (R) Oblicz granicę ciągu:

a) $a_n = \frac{-4n^2 + 3n + 1}{2 + n + 2n^2}$

b) $b_n = \frac{10n^2 - 2}{2 - n + n^3}$

c) $c_n = \frac{6n^4 + n^2 - 5}{2 - n^3}$

d) $d_n = 8 + 2n^3 - 4n^5$

e) $e_n = 3 \cdot 4^n - 5^{n+1}$

f) $f_n = \sqrt{n-2} - \sqrt{n-4}$

g) $g_n = \sqrt[3]{\frac{n^3 + 2}{8n^3 + n}}$

h) $h_n = \frac{3(n+2)! - n!}{(n+2)! + n!}$

i) $i_n = \frac{1+5+25+\dots+5^n}{3-5^{n+1}}$

j) $j_n = \frac{2^n + 3^n}{(2 \cdot 3)^n}$

k) $k_n = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{3n^3 + 2n - 5}$ wiedząc, że $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

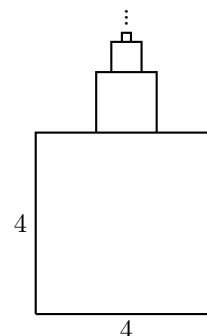
27. (R) Dla jakich x prawdziwa jest nierówność:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(|x| + \frac{|x|}{2} + \frac{|x|}{4} + \dots + \frac{|x|}{2^{n-1}} \right) < 1.$$

28. (R) Górną podstawę kwadratu o boku długości 4 podzielono na trzy równe części i skonstruowano kwadrat, następnie górną podstawę kwadratu górnego podzielono na trzy równe części i znów skonstruowano kolejny kwadrat, itd.

a) Oblicz sumę obwodów wszystkich kwadratów.

b) Oblicz sumę pól wszystkich kwadratów.



29. (R) Uzasadnij, że jeśli liczby x, y, z tworzą ciąg arytmetyczny rosnący, to liczby $2^{3-5x}, 2^{3-5y}, 2^{3-5z}$ tworzą ciąg geometryczny malejący.

30. (R) a) Dla jakich wartości x ciąg geometryczny o ilorazie $q = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$ jest zbieżny?

b) Dla jakich wartości x szereg geometryczny $1 + \frac{1}{3x} + \frac{1}{9x^2} + \frac{1}{27x^3} + \dots$ jest zbieżny? Oblicz sumę.

31. (R) Rozwiąż równanie, którego lewa strona jest sumą nieskończonego ciągu geometrycznego:

a) $x^2 + x^3 + x^4 + \dots = 1\frac{1}{3}$

b) $x - \frac{1}{2x} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4x} + \frac{x^3}{4} - \frac{1}{8x} + \dots = 1$

32. (R) Wyznacz wartość parametru b , dla której

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^2 n}{(b+4)n + b} = 2.$$

33. (R) Rozwiąż równanie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2^{x-1} + 2^{2x-2} + 2^{3x-3} + \dots + 2^{nx-n}) = 2 - 2^x.$$

34. (R) Rozwiąż nierówność:

a) $\log_3 x + \log_3^2 x + \log_3^3 x + \dots > -\frac{1}{3}$

b) $\sin^2 x + \sin^3 x + \sin^4 x + \dots \geq \frac{1}{2}$ dla $x \in (0, \pi)$.

35. (R) Liczby $0, (1)$ i $0, 0(5)$ są pierwszym i drugim wyrazem nieskończonego ciągu geometrycznego. Oblicz trzeci wyraz tego ciągu i zapisz go w postaci ułamka okresowego.
36. (R) Udowodnij, że jeżeli ciąg liczb dodatnich tworzy ciąg geometryczny, to logarytmy tych liczb przy dowolnej dodatniej i różnej od 1 podstawie, tworzą ciąg arytmetyczny.
37. (R) Dane są dwa ciągi: (a_n) , (b_n) , z których każdy jest ciągiem geometrycznym nieskończonym. Pierwszy wyraz ciągu (a_n) jest ilorazem ciągu (b_n) , a pierwszy wyraz ciągu (b_n) jest ilorazem ciągu (a_n) . Drugi wyraz ciągu (a_n) jest dwa razy większy od trzeciego wyrazu ciągu (b_n) , a stosunek sumy wszystkich wyrazów ciągu (a_n) do sumy wszystkich wyrazów ciągu (b_n) jest równy $\frac{9}{8}$. Wyznacz te ciągi.
38. (R) Dany jest ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{3n+1}{n+2}$.
- a) Uzasadnij, że ciąg (a_n) jest rosnący.
- b) Wyznacz granicę g tego ciągu.
- c) Które wyrazy ciągu (a_n) różnią się od granicy g o mniej niż $0,01$?
39. (R) Udowodnij indukcyjnie, że pochodna funkcji $f(x) = x^n$ dla $n \in \mathbb{N}_+$ jest równa nx^{n-1} , czyli $(x^n)' = nx^{n-1}$.
40. (R) Dany jest ciąg określony rekurencyjnie:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 3 \cdot a_n + 2, \quad n \in \mathbb{N}^+. \end{cases}$$

Oblicz pięć początkowych wyrazów tego ciągu. Udowodnij metodą indukcji matematycznej, że powyższy ciąg można wyrazić wzorem ogólnym $a_n = 3^n - 1$ dla $n \in \mathbb{N}^+$.

41. (R) Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest równość:

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}^+} 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + \dots + n \cdot (n+1)^2 = \frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+5)$$

42. (R) Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $10^n + 4^n - 2$ jest podzielna przez 3.
43. (R) Wykaż, że $n^3 + 5n$ jest podzielne przez 6, gdy $n \in \mathbb{N}^+$.
44. (R) Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}^+$ prawdziwa jest równość:

$$n^3 \geq \binom{n+1}{2}.$$