

Funkcja i jej własności

Zadanie 1

Określ dziedzinę każdej z podanych funkcji:

a) $y = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$

b) $y = \sqrt{3x-1}$

c) $y = \sqrt{\frac{1}{x}}$

d) $y = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$

e) $y = \frac{2x+1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$

f) $y = \sqrt{x^2}$

g) $y = \frac{1}{3x+1}$

h) $y = \frac{x^2}{2x-1}$

i) $y = \frac{x+1}{x^2-9}$

j) $y = \frac{3x}{x^2+2x+1}$

k) $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

l) $y = \frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$

m) $y = \frac{1}{|x+3|}$

n) $y = \frac{1}{|x|+3}$

o) $y = \frac{x+1}{\sqrt{|x|+1}}$

Zadanie 2

Wyznacz miejsca zerowe funkcji:

a) $f(x) = 3x - 5$

b) $f(x) = x^2 - 36$

c) $f(x) = 81 - x^2$

d) $f(x) = x^4 - 16$

e) $f(x) = (x^2 - 9)(2x + 4)$

f) $f(x) = x^2 + 3$

g) $f(x) = (25 - x^2)(4x^2 - 9)$

h) $f(x) = \frac{5}{2x+1}$

i) $f(x) = \frac{2x-6}{x+1}$

j) $f(x) = \frac{3-x}{x^2-2}$

k) $f(x) = \frac{4}{2x-1}$

l) $f(x) = \frac{x^2-4}{2x+1}$

m) $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$

n) $f(x) = \frac{16-x^2}{x+3}$

o) $f(x) = \sqrt{3x+12}$

p) $f(x) = \sqrt{x^2-9}$

r) $f(x) = \sqrt{x^2+4}$

s) $f(x) = \frac{x^2-2}{\sqrt{x-1}}$

t) $f(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{1-x}}$

u) $f(x) = (x-2)^2 - 9$

v) $f(x) = (x+1)^2 - 4$

w) $f(x) = (x-1)^3 - 27$

x) $f(x) = (x+3)^3 + 8$

y) $f(x) = \frac{x^2-16}{|x|+4}$

z) $f(x) = \frac{x^2-16}{|x|-4}$

ż) $f(x) = \frac{x^2-9}{|x|-9}$

Zadanie 3

Dla każdej z podanych funkcji sprawdź, czy podane obok liczby należą do zbioru jej wartości:

a) $f(x) = x + 5$, $x \in \mathbb{R}$; $2, \frac{1}{2}, 3 - \frac{2}{5}$;

b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}$; $0, -1, 5, \frac{1}{2}$;

c) $f(x) = x$, $x \in \mathbb{N}$; $-3, 0, 6, \frac{2}{5}$.

Zadanie 4

Wyznacz zbiór wartości: $x \rightarrow y = f(x)$, gdy:

a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0; 1)$

b) $f(x) = x + 3$, $x \in \langle -3, +\infty \rangle$

c) $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{N}$

d) $f(x) = x + 1$, $x \in \mathbb{N}$

e) $f(x) = x - 1$, $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$

f) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}_+$

g) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \langle 1; +\infty \rangle$

h) $f(x) = x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$

i) $f(x) = 1 - x^2$, $x \in \mathbb{R}$

j) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Zadanie 5

Jaki jest zbiór wartości funkcji $y = \sqrt[3]{x}$ o dziedzinie:

- a) $D_f = \langle 64, 125 \rangle$
 b) $D_f = (-27, 1000)$
 c) $D_f = (-\infty, -\frac{1}{8})$

Zadanie 6

Naszkicuj wykres funkcji określonej następująco:

- a) $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x \in \mathbb{R}_+ \\ 0, & \text{gdy } x = 0 \\ -1, & \text{gdy } x \in \mathbb{R}_- \end{cases}$
- b) $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{gdy } x \leq -2 \\ 2, & \text{gdy } -2 < x < 2 \\ x, & \text{gdy } x \geq 2 \end{cases}$
- c) $g(x) = \begin{cases} x+1, & \text{gdy } x < -1 \\ 1, & \text{gdy } x = -1 \\ 0, & \text{gdy } -1 < x < 1 \\ -1, & \text{gdy } x = 1 \\ -x-1, & \text{gdy } x > 1 \end{cases}$

Zadanie 7

Naszkicuj wykres funkcji:

- a) $f(x) = |x| + |x-1|$
 b) $g(x) = |x+4| + 2|x|$

Zadanie 8

Symbol $[x]$ oznacza największą z liczb całkowitych, które są: mniejsze lub równe x , np. $[\frac{1}{2}] = 0$, $[-\frac{3}{4}] = -1$, $[2] = 2$. Naszkicuj wykresy funkcji:

- a) $f(x) = [x]$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$
 b) $g(x) = [x]$, $x \in \mathbb{R}$
 c) $h(x) = x - [x]$, $x \in \mathbb{R}$

Zadanie 9

Naszkicuj wykres funkcji danej wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (-\infty, 2) \\ |x| & \text{dla } x \in (-2, \infty) \end{cases}$$

Odczytaj z wykresu liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od parametru m .

Zadanie 10

Naszkicuj wykres funkcji danej wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} x+6 & \text{dla } x \in (-\infty, -2) \\ x^2 & \text{dla } x \in \langle -2, 2 \rangle \\ x+2 & \text{dla } x \in (2, \infty) \end{cases}$$

Dla jakich wartości m równanie $f(x) = m$ ma:

- a) jedno rozwiązanie
 b) dwa rozwiązania
 c) trzy rozwiązania

Zadanie 11

Naszkicuj wykres dowolnej funkcji $f: \langle -6, 6 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

spełniającej warunki:

- najmniejsza wartość funkcji jest równa -3 , a największa 4 ;
- funkcja rośnie w przedziałach $(-6, -3)$ i $(2, 6)$, jest stała w przedziale $(-3, 0)$ i maleje w przedziale $(0, 2)$; $-f(x) < 0$ dla $x \in (1, 3)$.

Zadanie 12

Narysuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji: $y = \sqrt{x}$ oraz $y = \sqrt[3]{x}$ dla $x \in \langle 0, \infty \rangle$. Odczytaj z wykresu rozwiązanie nierówności $\sqrt{x} < \sqrt[3]{x}$.

Zadanie 13

Znajdź wzór funkcji symetrycznej do danej względem osi OX , osi OY , początku układu współrzędnych oraz sporządź jej wykres przed i po przekształceniu:

- a) $y = -3x + 1$
 b) $y = 2x - 3$
 c) $y = \sqrt{x}$
 d) $y = \frac{1}{x}$
 e) $y = x^2$
 f) $y = |x|$

Zadanie 14

Wyznacz współrzędne wektorów: $\overrightarrow{AB}$, $-\overrightarrow{AB}$, $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, $2\overrightarrow{AB}$, $-3\overrightarrow{AB}$ oraz ich długości, gdy:

- a) $A = (7, -3)$, $B = (-3, 5)$
 b) $A = (-3, 7)$, $B = (2, -5)$
 c) $A = (2, 5)$, $B = (-7, 5)$

Zadanie 15

Oblicz długości wektorów: $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u} + \vec{v}$ i $\vec{u} - \vec{v}$, jeśli:

- a) $\vec{u} = [5, 5]$, $\vec{v} = [-2, -1]$
 b) $\vec{u} = [3, 4]$, $\vec{v} = [-3, -4]$
 c) $\vec{u} = [-1, \sqrt{2}]$, $\vec{v} = [2, -3\sqrt{2}]$
 d) $\vec{u} = [\frac{1}{2}, \frac{1}{4}]$, $\vec{v} = [\frac{3}{2}, \frac{3}{4}]$

Zadanie 16

Niech $\vec{w} = [9, -15]$ i $\vec{v} = [-8, 18]$. Znajdź współrzędne wektorów, a następnie ich długości:

- a) $-3\vec{w}$, $\frac{5}{8}\vec{v}$
 b) $-3\vec{w} + 4\vec{v}$
 c) $2\vec{w} + \frac{1}{4}\vec{v}$
 d) $\frac{1}{3}\vec{w} - \frac{5}{6}\vec{v}$

Zadanie 17

Wyznacz obraz punktu $P = (3, 4)$ w przesunięciu o wektor:

- a) $\vec{u} = [-2, 1]$

b) $\vec{u} = [-3, -2]$

c) $\vec{u} = [4, -1]$

d) $\vec{u} = [6, 5]$

Zadanie 18

Obrazem punktu $P = (x, y)$ w przesunięciu równoległym o wektor $\vec{u} = [-3, 4]$ jest punkt:

a) $P' = (-2, 6)$

b) $P' = (1, -4)$

c) $P' = (-3, -4)$

d) $P' = (5, 7)$.

Wyznacz współrzędne punktu P .

Zadanie 19

Podaj wzór funkcji po przesunięciu o wektor oraz sporządź jej wykres przed i po przekształceniu:

a) $y = -3x + 1$, $\vec{v} = [0, -1]$

b) $y = 2x - 3$, $\vec{v} = [-2, 0]$

c) $y = \frac{1}{x}$, $\vec{v} = [0, 4]$

d) $y = \frac{1}{x-2}$, $\vec{v} = [1, 3]$

e) $y = \frac{3}{x+2} - 1$, $\vec{v} = [-2, 1]$

f) $y = x^2$, $\vec{v} = [3, 2]$

g) $y = |x| + 1$, $\vec{v} = [-2, -1]$

Zadanie 20

Korzystając z wykresu funkcji $y = \frac{1}{2}|x|$, naszkicuj wykres funkcji:

a) $y = \frac{1}{2}|x - 3|$

b) $y = \frac{1}{2}|x + 2|$

c) $y = \frac{1}{2}|x + 3|$

Zadanie 21

Naszkicuj wykresy funkcji:

a) $y = -[x]$

b) $y = [x + 3]$

c) $y = [x] + 3$

d) $y = [-x]$

e) $y = [x + 2]$

Zadanie 22

Naszkicuj na jednym rysunku pary wykresów funkcji:

a) $y = x$ i $y = |x|$

b) $y = x + 1$ i $y = |x + 1|$

c) $y = x^3$ i $y = |x^3|$

d) $y = \frac{1}{x}$ i $y = \left|\frac{1}{x}\right|$

Jak z wykresu funkcji $y = f(x)$ można otrzymać wykres funkcji $y = |f(x)|$?

Zadanie 23

Naszkicuj na jednym rysunku pary wykresów funkcji:

a) $y = \sqrt{x}$ i $y = -\sqrt{x}$

b) $y = 3x - 1$ i $y = -(3x - 1)$

c) $y = x^2$ i $y = -x^2$

d) $y = 3$ i $y = -3$

Jak z wykresu funkcji $y = f(x)$ można otrzymać wykres funkcji $y = -f(x)$?

Zadanie 24

Naszkicuj na jednym rysunku pary wykresów funkcji:

a) $y = 2x$ i $y = 2(-x)$

b) $y = |x|$ i $y = |-x|$

c) $y = x^3$ i $y = |(-x)^3|$

d) $y = \operatorname{sgn} x$ i $y = \operatorname{sgn}(-x)$.

Jak z wykresu funkcji $y = f(x)$ można otrzymać wykres funkcji $y = f(-x)$?

Zadanie 25

Naszkicuj wykres funkcji $y = 3x$, a następnie przekształcając go odpowiednio naszkicuj wykresy funkcji:

a) $y = 3x - 3$

b) $y = 3x + 2$

c) $y = -3x$

d) $y = |3x|$

Zadanie 26

Naszkicuj na jednym rysunku pary wykresów funkcji:

a) $y = x + 1$ i $y = |x| + 1$

b) $y = 2x - 1$ i $y = 2|x| - 1$

c) $y = -3x + 2$ i $y = -3|x| + 2$

d) $y = -2x - 3$ i $y = -2|x| - 3$

Jak z wykresu funkcji $y = ax + b$ otrzymać wykres funkcji $y = a|x| + b$?

Zadanie 27

Sprawdź, które z punktów $A = (\frac{1}{2}, 0)$, $B = (-3, 0)$, $C = (1, 1)$, $D = (2, 3)$ należą do wykresu funkcji:

a) $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$

b) $g(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}_+$

c) $h(x) = 2x - 1$, $x \in \mathbb{C}$

Zadanie 28

Wyznacz brakujące współrzędne punktów:

$A = (4, y), B = (x, 0), C = (x, -3), D = (2, y),$

$E = (x, 2\sqrt{3}), F = (x, b)$ tak, aby każdy z nich należał do wykresu funkcji:

a) $y = 5 - x$

b) $y = x^2$

c) $y = \sqrt{x}$

d) $y = \frac{1}{2}x$

e) $y = |x|$

f) $y = 2x + 3$

Czy w każdym przypadku zadanie ma rozwiązanie?

Zadanie 29

Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie dwucyfrowej iloczyn jej cyfr, np $f(23) = 6$.

a) Jaka jest najmniejsza, a jaka największa wartość tej funkcji?

b) Dla ilu argumentów funkcja przyjmuje wartość 12, a dla ilu 16?

c) Dla ilu argumentów funkcja przyjmuje wartości parzyste, a dla ilu nieparzyste?

Zadanie 30

Wykaż na podstawie definicji, że funkcja

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$
 jest malejąca w przedziale $(0, \infty)$.

Zadanie 31

Korzystając z definicji, udowodnij, że funkcja $f(x)$ jest malejąca.

a) $f(x) = \frac{1}{x} + 2, \quad D_f = (0, \infty)$

b) $f(x) = \frac{1}{x} + 2, \quad D_f = (-\infty, 0)$

Zadanie 32

Sprawdź która z funkcji jest parzysta, która nieparzysta, a która ani parzysta ani nieparzysta:

a) $y = |x|$

b) $y = |x + 4|$

c) $y = |x| - 1$

d) $y = x^2$

e) $y = (x + 1)^2 - 2$

f) $y = x$

g) $y = x + 4$

h) $y = \frac{1}{x}$

i) $y = x^3$

Która z funkcji jest różnowartościowa?

Zadanie 33

Zależność między temperaturą podaną w stopniach Kelvina $[K]$ i stopniach Celsjusza $[^{\circ}C]$ opisuje wzór:

$$x[^{\circ}C] = T[K] - 273,15$$

Jaka jest zależność między temperaturą w stopniach Kelvina a tą samą temperaturą w stopniach Fahrenheita?

Zadanie 34

Podaj wzór funkcji $f(x)$ opisującej długość przekątnej sześcianu o objętości x . Oblicz wartość tej

funkcji dla:

a) $x = 8$ b) $x = 64$ c) $x = 1000$

Zadanie 35

Funkcja $V(x)$ opisuje objętość sześcianu o krawędzi x i przekątnej mniejszej od 12. Dziedziną tej funkcji jest zbiór:

A. $(0, 12)$

B. $(0, 4\sqrt{3})$

C. $(0, 6\sqrt{2})$

Zadanie 36

a) Wykaż, że długość okręgu ograniczającego koło o polu x opisuje funkcja $f(x) = 2\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{x}$.

b) Jaka jest dziedzina i zbiór wartości tej funkcji, jeśli rozpatrujemy koła o promieniu mniejszym od 6?