Logika, teoria zbiorów i wartość bezwzględna

Zadanie 1
Które z podanych wyrażeń są zdaniami logicznymi?
a) Na Księżycu żyją istoty rozumne.
b) Janek idzie do szkoły.
c) W roku 2000 w Polsce będzie 50 mln. mieszkańców.
d) Wieloryb jest rybą.
e) Proste a i b są równoległe.
f) $2 + 2 = 5$.
g) $x + 3 = 2$.
h) Idź po zakupy.
i) Kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną.
j) Dla każdej wartości $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $x + 2 = 5$.

Zadanie 2
Oceń wartość logiczną zdań:
a) 5 jest liczbą pierwszą.
b) $sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
c) π jest liczbą wymierną.
d) Każde zdanie logiczne jest prawdziwe.
e) Istnieją dwie kolejne liczby naturalne będące liczbami pierwszymi.

Zadanie 3
Używając zdań p, q, r, s oraz spójników $\wedge, \vee$, zapisz dwa zdania złożone prawdziwe i dwa zdania złożone fałszywe.
$p : 3|222$
$q : \sqrt{1\frac{16}{25}} = 1\frac{1}{4}$
$r : 86 - 80 = 16$
$s : \sqrt{\sqrt{81}} = 3$
Następnie wśród zdań p, q, r, s wskaż te pary zdań, dla których:
a) prawdziwa jest zarówno ich koniunkcja, jak i alternatywa;
b) prawdziwa jest ich alternatywa, ale nie jest prawdziwa ich koniunkcja;
c) prawdziwa jest ich koniunkcja, ale nie jest prawdziwa ich alternatywa.

Zadanie 4
Ze zdań p, q, r, s z zadania poprzedniego zapisz zdania:
a) $(p \vee q) \wedge r$
b) $p \vee (q \wedge r)$
i oceń ich wartość logiczną.

Zadanie 5
Oceń wartość logiczną koniunkcji:
a) 2 jest liczbą parzystą i 2 jest liczbą pierwszą,
b) $\sqrt{2}$ jest liczbą dodatnią i $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną,
c) $5 > 0$ i $5 < 4$,
d) prosta jest figurą geometryczną i figurą ograniczoną,
e) Warszawa jest stolicą Polski i Kraków jest stolicą Polski.

Zadanie 6
Oceń wartość logiczną alternatywy:
a)$2 > 5$ lub $2 < 5$,
b) Romb jest kwadratem lub romb jest czworokątem,
c) -3 jest liczbą parzystą lub nieparzystą,
d) $3 < 2$ lub równoległobok jest okręgiem.

Zadanie 7
Oceń prawdziwość poniższych implikacji. Które ze zdań po zastąpieniu symbolu implikacji ($\Rightarrow$) symbolem równoważności ($\Leftrightarrow$) jest zdaniem prawdziwym?
a) $4|100 \Rightarrow 4^2|100^2$ **c)** $9|15 \Rightarrow 3|15$
b) $4|10 \Rightarrow 4^2|10^2$ **d)** $3|21 \Rightarrow 9|21$

Zadanie 8
Oceń wartość logiczną zdań:
a) $3 < 2$ i Warszawa jest stolicą Polski,
b) $3 < 2$ lub Warszawa jest stolicą Polski,
c) jeżeli $3 < 2$, to Warszawa jest stolicą Polski,
d) $3 < 2$ wtedy i tylko wtedy, gdy Ziemia jest planetą,
e) jeżeli $2 < 20$, to $3 > 4$,
f) jeżeli jestem chory, to $2 \cdot 2 = 4$,
g) jeżeli idę, to $2 \cdot 2 = 5$,
h) jeżeli $2 \cdot 5 = 12$, to $2 - 5 = 10$.

Zadanie 9
Sprawdź metodą zerojedynkową, które z podanych

wyrażeń są prawami logicznymi:
a) $p \Rightarrow (p \vee q)$
b) $(p \vee q) \Rightarrow p$
c) $(p \vee q) \Rightarrow q$
d) $[(p \vee q) \wedge \sim q] \Rightarrow p$
e) $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$
f) $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$

Zadanie 10
Sprawdź metodą zerojedynkową, które z podanych wyrażeń są tautologiami:
a) $(q \vee r) \Rightarrow (p \vee q)$
b) $(p \vee q) \vee r \Rightarrow (p \vee r)$
c) $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$
d) $[p \vee (q \wedge \sim p)] \Rightarrow q$
e) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

Zadanie 11
Sprawdź metodą zerojedynkową, które z podanych wyrażeń są prawami logicznymi:
a) $\sim (\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow (p \vee q)$
b) $[(p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow q)] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
c) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$
d) $[(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
e) $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$
f) $\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$
g) $[p \Rightarrow \sim p] \Rightarrow q$
h) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
i) $(p \Rightarrow \sim p) \Rightarrow p$
j) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim p \vee q$
k) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Zadanie 12
Stosując prawa de Morgana napisz zaprzeczenie zdań:
a) $p \vee (q \vee r)$
np. $\sim [p \vee (q \vee r)] \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim (q \vee r) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q) \wedge (\sim r)$
b) $p \vee (q \wedge r)$
c) $(p \wedge q) \vee r$
d) $(p \wedge q) \wedge r$
e) $p \wedge (q \vee r)$
f) $(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$
g) $p \wedge (q \vee r \vee s)$

Zadanie 13
Uzupełnij zapisy tak, aby otrzymać zdania prawdziwe:
a) $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$
$\sim (a \cdot b) = 0 \Leftrightarrow \ldots$
b) $|x| = 1 \Leftrightarrow \ldots$
$\sim |x| = 1 \Leftrightarrow \ldots$
c) $(x+1)(x-2) > 0 \Leftrightarrow \ldots$
$\sim [(x+1)(x-2) > 0] \Leftrightarrow \ldots$
d) $1 < x < 4 \Leftrightarrow \ldots$
$\sim (1 < x < 4) \Leftrightarrow \ldots$
UWAGA: Przykład **c** to nierówność kwadratowa.

Zadanie 14
Którymi z poniższych funkcji zdaniowych można uzupełnić implikację:

$$x > 2 \Rightarrow \ \ldots$$

tak, aby była ona prawdziwa dla wszystkich liczb rzeczywistych?
$A : x^2 + 8 = 0$
$B : x^2 > 4$
$C : x = 3$
$D : x^2 > 0$

Zadanie 15
Uzupełnij zapisy tak, aby otrzymać zdania prawdziwe:
a) $x \in A \cap B \Leftrightarrow \ldots$
$\sim (x \in A \cap B) \Leftrightarrow \ldots$
b) $x \in A \setminus B \Leftrightarrow \ldots$
$\sim (x \in A \setminus B) \Leftrightarrow \ldots$
c) $x \in A \cup B \Leftrightarrow \ldots$
$\sim (x \in A \cup B) \Leftrightarrow \ldots$

Zadanie 16
A i B oznaczają zbiory niepuste. Jaki jest związek między tymi zbiorami, jeśli:
a) $(A \cup B) \subset B$
b) $A \cup B = B$
c) $A \cap B = B$
d) $A \subset (A \cap B)$
e) $A \subset (A \setminus B)$?

Zadanie 17
Udowodnij podane prawa algebry zbiorów:
a) $A \cap (A \cup B) = A$
b) $(A \cap B) \cup B = B$
c) $B \cup (A \setminus B) = A \cup B$
d) $[A \cup (A \cap B)] \cup B = A \cup B$
e) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$
f) $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$
g) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
h) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$
i) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
j) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

k) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

l) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

m) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Zadanie 18
Naszkicuj diagramy dla zbiorów: $(A \cup B)'$, $(A \cap B)'$, $A' \cap B'$, $A' \cup B'$. Na ich podstawie sformułuj odpowiednie prawa rachunku zbiorów.

Zadanie 19
Wyznacz i zaznacz na osi zbiór $A' = \mathbb{R} \setminus A$, gdy:

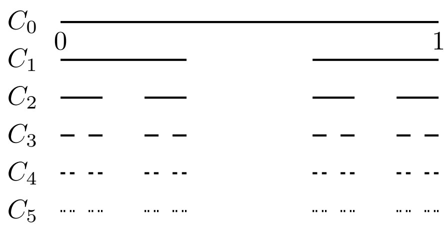
a) $A = \langle -4, 2)$ **d)** $A = \{1, 2, 3\}$
b) $A = (1, 2) \cup (3, 4)$ **e)** $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
c) $A = (-\infty, 1) \cup \{4\}$ **f)** $A = \emptyset$

Zadanie 20
Wyznacz zbiory A', B' i $A' \cap B'$, gdy:

a) $A = (-3, 0),\ B = \langle \frac{1}{2}, 3\rangle$
b) $A = \langle -4, 4\rangle,\ B = (-2, 2)$
c) $A = (-\infty, -3) \cup (3, \infty),\ B = \langle -4, 4\rangle$
d) $A = (-\infty, 0) \cup (1, 5),\ B = (-5, -1) \cup (0, \infty)$

Zadanie 21
Zapisz jako sumy przedziałów zbiory C_2 i C_3. Rysunek przedstawia kolejne etapy konstrukcji zaproponowanej przez Georga Cantora ($1845-1918$). Zaczynamy od odcinka jednostkowego i na każdym kolejnym etapie usuwamy środkową trzecią część odcinków z poprzedniego etapu. Stąd np.

$$C_1 = \left\langle 0, \frac{1}{3} \right\rangle \cup \left\langle \frac{2}{3}, 1 \right\rangle.$$



Zadanie 22
Wyznacz zbiory:

a) $\mathbb{N} \cap \mathbb{IW}$ ($\mathbb{IW}$ -zbiór liczb niewymiernych)

b) $\mathbb{C} \cap \mathbb{IW}$

c) $\mathbb{N} \cup \mathbb{W}$

d) $\mathbb{N} \setminus \mathbb{W}$

e) $\mathbb{W} \setminus \mathbb{C}$

f) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

g) $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$

h) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{W}$

i) $\mathbb{W} \cap \mathbb{R}$

j) $\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_-$

Zadanie 23
Wyznacz wszystkie elementy zbiorów:

a) $A = \{x : |x| = 2 \wedge x \in \mathbb{C}\}$

b) $B = \{x : |x| = 3 \wedge x \in \mathbb{N}\}$

c) $D = \{x : |x| > 2 \wedge x < 10 \wedge x \in \mathbb{N}\}$

d) $E = \{x : |x| < 3\frac{1}{2} \wedge x \in \mathbb{C}\}$

Zadanie 24
Mając dane zbiory:

a) $A = \{x \in \mathbb{N};\ x \geqslant 3\}$ i $B = \{x \in \mathbb{C};\ x < 7\}$
b) $A = \{x \in \mathbb{C};\ x \geqslant 5\}$ i $B = \{x \in \mathbb{N};\ x < 10\}$

Znajdź $A \cap B$, $A \cup B$, $B \setminus A$ i $A \setminus B$.

Zadanie 25
Wyznacz zbiory $A \cap B$, $A \cup B$ i $A \setminus B$, jeżeli:

a) $A = \langle -3; 2\rangle$ i $B = (0; 4)$

b) $A = \langle -3; 2\rangle$ i $B = (3; 6)$

c) $A = \langle -3; 2\rangle$ i $B = \langle -1; 1\rangle$

d) $A = \langle -3; 2\rangle$ i $B = \langle 2; +\infty)$

Zadanie 26
Wyznacz zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $B \setminus A$ i $A \setminus B$, jeżeli:

a) $A = \langle -1; 2)$ i $B = (0; 3)$

b) $A = (-5; 3\rangle$ i $B = \langle 0; 4)$

c) $A = \langle 1; 2)$ i $B = \langle -\frac{1}{2}; 1\frac{3}{4}\rangle$

d) $A = (-4; 1\rangle$ i $B = (0; +\infty)$

Zadanie 27
Przestrzenią jest $\mathbb{R}$. Dane są przedziały $A = \langle 2; 4\rangle$ i $B = \langle 3; 5\rangle$. Wyznacz zbiory:

a) $(A \cup B)'$

b) $A' \cap B'$

c) $(A \setminus B)'$

d) $A' \cup B$

e) $A' \cup B'$

f) $(A \cap B)'$

g) $A' \setminus B$

h) $A' \setminus B'$

Zadanie 28
Rozwiąż równania i nierówności::

a) $|x| = 1$

b) $|x| = -2$

c) $|x| = 0$

d) $|x| < 4$

d) $|x| < 0$

e) $|x| < -1$

f) $|x| \leqslant 9$

g) $|x| \leqslant -7$

h) $|x| \leqslant 0$

i) $|x| > 3$

j) $|x| > 0$

k) $|x| > -2$

l) $|x| \geqslant 8$

m) $|x| \geqslant -5$

n) $|x| \geqslant 0$

Zadanie 29
Wyznacz zbiór liczb spełniających obie nierówności jednocześnie:

a) $|x| > 1 \wedge |x| \leqslant 9$

b) $|x| \geqslant \frac{1}{7} \wedge |x| < 7$

c) $|x| \geqslant \frac{1}{4} \wedge |x| < \frac{1}{2}$

d) $|x| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \wedge |x| < \frac{1}{2}$

Zadanie 30
Rozwiąż równania:

a) $|x-4| = 8$

b) $3|x-2| - |x-2| = 2$

c) $|x-1| + 3|x-1| = 6$

d) $|x+4| = 1$

e) $|x+1| = -2$

f) $|x+3| + 6 = 2$

g) $||x| - 4| = 8$

h) $||x| - 2| = 2$

i) $||x-1| + 3| = 6$

Zadanie 31
Rozwiąż nierówności:

a) $|x-1| < 3$

b) $|x+2| \leqslant 4$

c) $3|x+1| < 3 + 2|x+1|$

d) $|x+2| \leqslant 2 + 4|x+2|$

e) $||x| - 1| < 3$

f) $|x-3| > 1$

g) $|x+4| \geqslant 5$

h) $3|x-2| > 4 + 2|x-2|$

i) $2|x-3| \geqslant 1 + 3|x-3|$

j) $||x+2| - 1| > 3$

k) $||x| + 2| \geqslant 4$

l) $||x-2| - 3| < 3$

Zadanie 32
Dla jakich liczb (par liczb) prawdziwe są równości:

a) $|x| + 5 = |x+5|$

b) $|x| \cdot |y| = |xy|$

c) $|x| - |y| = 0$

d) $|2x+1| = 1$

e) $|3-x| = 4$

f) $|x| + |x+1| = 3$?

Zadanie 33
Uprość wyrażenia:

a) $x + |1-x| + 2|x-2|$, gdy $1 < x < 2$

b) $|x| + |x+1| + |x-2|$, gdy $x < -1$

c) $|x-1| + \frac{x}{|x|} - |x+1|$, gdy $x < -2$

Zadanie 34
Z definicji pierwiastka arytmetycznego wynika, że:

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

Korzystając z tego wzoru uprość:

a) $\sqrt{x^2} + x$

b) $\sqrt{(x-5)^2} + \sqrt{x^2}$

c) $\sqrt{\frac{a^2}{b^2}}$, gdy $b \neq 0$

d) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + x$

Zadanie 35
Zapisz w prostszej postaci:

a) $\sqrt{9a^2}$

b) $\sqrt{0,16a^2y^2}$

c) $\sqrt{\frac{9a^2b^2}{25x^4y^2}}$

d) $\sqrt{1,44a^8b^{12}c^4}$

e) $\sqrt{a^2+4b^2+4ab}$

f) $\sqrt{a^2-2ab+b^2}$

Zadanie 36
Zapisz podane wyrażenia bez znaku wrtości bezwzględnej:

a) $|m^2|$

b) $|m-n|$, gdy $m<n$

c) $|m-n|$, gdy $m>n$

d) $|-m|$, gdy $m<0$

Zadanie 37
Jakie wartości przyjmuje wyrażenie $\frac{|x|}{x}$?

Zadanie 38
Do jakiego przedziału liczbowego należy x, jeśli:

a) $|x-3|=x-3$

b) $|x+2|=-x-2$

c) $|2x-6|=6-2x$

d) $\sqrt{(x-4)^2}=x-4$?

Zadanie 39
Wykaż, że dla każdej pary liczb rzeczywistych prawdziwe są związki:

a) $|xy|=|x|\cdot|y|$

b) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$

c) $|x-y|\leqslant|x|+|y|$

d) $y\neq 0\Rightarrow\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$

Zadanie 40
Rozwiąż równania:

a) $2x+|x-1|=2$

b) $2x^2+|x|=1$

c) $|x^2-x|=x-1$

d) $x+|x-1|=1$

e) $(2x-1)|x-1|=x$

f) $|x-1|+|x-2|+|x+1|+|x+2|=6$

g) $|x-1|+|x-2|=|x|$

UWAGA: Przykłady: **b, c, e** to równania kwadratowe.

Zadanie 41
Rozwiąż nierówności:

a) $|x|+x<4$

b) $5x>|x-5|+1$

c) $|x+3|\leqslant|x|-1$

d) $x+|x+3|\leqslant|1-x|$

e) $2x+7+|x-1|>|3-x|$

f) $|x-1|+|x+2|+|x+1|\geqslant|x-22|+16$

Zadanie 42
Rozwiąż nierówności:

a) $\sqrt{4x^2}\leqslant 3$

b) $\sqrt{x^2-6x+9}\leqslant 3$

c) $|x+4|+\sqrt{x^2+8x+16}\geqslant 1$

Zadanie 43
Rozwiąż równania i nierówności z wartością bezwzględną:

a) $|x|+|x+1|+|x+2|=3$

b) $|x|+|x+2|+|2x+2|=4$

c) $\frac{1}{|x|}=x+2$

d) $\frac{2x}{|x-3|}=x-2$

e) $||x|-1|=2$

f) $|||x|-1|-2|=3$

g) $||||x|-1|-2|-4|=5$

h) $|x^2+3x-2|<|x^2+2x-1|$

i) $|x^3-x|>|x^2-1|$

j) $\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2+2x+1}\leq x+3$

k) $|x+2|+|2x+4|+\sqrt{x^2+4x+4}\geq 8$

l) $|x+3|+|x+2|\geq|x|+x+3$

m) $|x+1|+|x|+2|x-1|\leq 9$

n) $|x|+|x+1|+|x+2|=3$

o) $|x|+|x+2|+|2x+2|=4$

p) $\frac{1}{|x|}=x+2$

r) $\frac{2x}{|x-3|}=x-2$

s) $||x|-1|=1$

t) $|||x|-1|-1|=1$

u) $||||x|-1|-1|-1|=1$

w) $|x^2+3x-2|=|x^2+2x-1|$

v) $|x^3-x|=|x^2-1|$

x) $|x+2|+|2x+4|+\sqrt{x^2+4x+4}\leq 8$

y) $|x+3|+|x+2|\leq|x|+x+3$

z) $|x+1|+|x|+2|x-1|\geq 9$

UWAGA: Zadanie zawiera przykłady równań i nierówności wielomianowych oraz wymiernych.

Zadanie 44
Zaznacz na płaszczyźnie zbiór:

a) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: |x|<4\wedge|y|\leqslant 2\}$

b) $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: |x|\leqslant|y|\wedge|y|<2\}$