

Liczby rzeczywiste

Zadanie 1

Oblicz wartość ilorazu $\frac{NWW(x,y)}{NWD(x,y)}$, gdy:

a) $x = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^3$, $y = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 7^3$

b) $x = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^7 \cdot 17$, $y = 2 \cdot 3^4 \cdot 17$

Zadanie 2

Oblicz:

a) $1\frac{1}{2} \cdot (1\frac{1}{2})^3$

b) $(1\frac{3}{4})^{-4} : (1\frac{3}{4})^{-6}$

c) $4^9 : (4^5 : 4^{-4})$

d) $(0,3)^8 \cdot (3\frac{1}{3})^8$

e) $5^{13} : [5^{18} \cdot (\frac{1}{5})^8]$

f) $[(2^{-3})^{-2}]^{-1}$

g) $\frac{7^{32} \cdot 7^{63} \cdot (7^4)^6}{(7^8)^9 \cdot (7^6)^8}$

h) $\frac{5 \cdot 4^7 - 6 \cdot 16^3}{2^{13}}$

Zadanie 3

Przedstaw w postaci potęgi:

a) $(\frac{1}{2})^6 - (\frac{1}{2})^7$

b) $3 \cdot 2^4 + 2^5 + 2^6 + 7 \cdot 2^4$

c) $5^8 + 3 \cdot 25^3 - 5^7 + 2 \cdot 5^6$

d) $2 \cdot 3^{13} + 5 \cdot 3^{11} + 12 \cdot 3^{10}$

e) $5 \cdot 2^{15} + 9 \cdot 2^{13} + 6 \cdot 2^{12}$

Zadanie 4

Oblicz, pamiętając o kolejności wykonywania działań:

a) $42 : (-7) + 9 - 8 \cdot \sqrt{5^2 - 4^2}$

b) $4\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{196} - 5^0 \cdot 3^3 + (\frac{1}{2})^{-3}$

c) $2\sqrt{64} - 18 : 3^2 - \sqrt{144}$

d) $2(\sqrt{64} - 18) : (2^2 - \sqrt{196})$

e) $2\sqrt{64} - 18 : (3^2 - \sqrt{196})$

f) $3(\sqrt{64} - 18) : (4^2 - \sqrt{225})$

Zadanie 5

Wyciągnij czynnik przed pierwiastek i przeprowadź redukcję:

a) $3\sqrt{20} + 5\sqrt{45} - 2\sqrt{80}$

b) $0,5\sqrt{50} + 0,8\sqrt{72} - 0,2\sqrt{32}$

c) $\sqrt{x^3} + \frac{1}{2}\sqrt{36x^3} - \frac{2x}{3}\sqrt{9x}$, gdy $x > 0$

d) $(0,5\sqrt{24} - 3\sqrt{40}) - (\sqrt{150} + \sqrt{54} - \sqrt{1000})$

e) $6\sqrt{24} - 3\sqrt{54} - 2\sqrt{150}$

f) $\frac{1}{3}\sqrt{72} - 0,5\sqrt{200} + \frac{2}{3}\sqrt{18} - 0,8\sqrt{32}$

g) $2,5\sqrt{1,44} - (3\sqrt{2,56} - 1,2\sqrt{2,25})$

h) $(4\sqrt[3]{24} - 2\sqrt[3]{81}) - (3\sqrt[3]{250} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{648})$

i) $3\sqrt{2}(\frac{1}{3}\sqrt{6} - \frac{1}{2}\sqrt{50})$

j) $(3\sqrt{12} - 5\sqrt{48}) \cdot (-3\sqrt{3})$

k) $(1,8\sqrt{48} - 2,4\sqrt{75}) \cdot (-\sqrt{12})$

l) $(2\sqrt{2} - 3\sqrt{3})^2$

m) $(6 - 2\sqrt{6})^2$

n) $(2\sqrt{12} - 5\sqrt{3})^2$

Zadanie 6

Wykonaj mnożenie:

a) $(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})(2\sqrt{3} - \sqrt{2})$

b) $(3\sqrt{5} - 2\sqrt{6})(2\sqrt{6} - \sqrt{5})$

c) $(a - \sqrt{b})(2a + 2\sqrt{b})$

d) $(c + 2\sqrt{2})(3c - 6\sqrt{2})$

Zadanie 7

Dane są liczby x i y . Oblicz $x - y$, $x + y$, xy i $\frac{x}{y}$.

Otrzymane wyniki przedstaw w postaci $a + b\sqrt{c}$.

a) $x = 3 + 2\sqrt{3}$ i $y = 2 - 3\sqrt{3}$

b) $x = 2 - \sqrt{2}$ i $y = 2 + \sqrt{2}$

c) $x = 2 - 5\sqrt{7}$ i $y = 1 - \sqrt{7}$

d) $x = \frac{2}{3} - \sqrt{3}$ i $y = \sqrt{3}$

Zadanie 8

Wykonaj mnożenie:

a) $(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{15} + \sqrt{12})$

b) $(\sqrt{6} - \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{8})$

Zadanie 9

Przekształć wyrażenie:

a) $\frac{5}{\sqrt{2}}$

b) $\frac{6}{5\sqrt{3}}$

- c) $\frac{2\sqrt{3}-3}{4\sqrt{3}}$
d) $\frac{1-5\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$
e) $\frac{-2\sqrt{48}+5\sqrt{12}}{\sqrt{27}}$
f) $\frac{\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}$
g) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}$
h) $\frac{3\sqrt{2}-4}{\sqrt{3}+5}$
i) $\frac{-\sqrt{27}+3\sqrt{3}}{7-4\sqrt{3}}$
j) $\frac{\sqrt{3}-\frac{1}{2}}{1,5-\sqrt{3}}$

na równoważne mu wyrażenie, którego mianownik jest liczbą wymierną.

Zadanie 10

Zbadaj, jaką liczbą wymierną, czy niewymierną jest liczba:

- a) $\sqrt{57-40\sqrt{2}}-\sqrt{40\sqrt{2}+57}$
b) $\sqrt{28\sqrt{5}+69}+\sqrt{69-28\sqrt{5}}$

Zadanie 11

Oblicz:

- a) $\sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt{15}$, b) $\sqrt{5\frac{1}{4}} : \sqrt{\frac{7}{3}}$, c) $\sqrt[3]{20} \cdot \sqrt[3]{50}$

Zadanie 12

Oblicz:

- a) $\sqrt{(7-\sqrt{7})^2}-\sqrt{(\sqrt{7}+7)^2}$
b) $\sqrt{88+\sqrt{144}}$
c) $\sqrt{1\frac{9}{16}}-\sqrt[3]{\frac{125}{64}}$
d) $\frac{\sqrt{121}-\sqrt{196}}{\sqrt{144}-\sqrt{169}}$
e) $\frac{8\cdot 4\frac{1}{4}-11\frac{1}{5}:9\frac{1}{3}-(-2\frac{1}{3}):\frac{5}{3}}{14:2\frac{2}{9}+8\frac{2}{5}\cdot 1\frac{2}{7}}$
f) $\frac{15\cdot 3\frac{1}{5}-10\frac{1}{3}:9\frac{1}{3}-(-3\frac{2}{3}):\frac{5}{9}}{12:1\frac{1}{9}}$
g) $0,05-\frac{(2\frac{4}{5}-1,9):3\frac{3}{4}}{[3\frac{1}{6}-(-1,25)]\cdot 2,4+(-5,8)}$
h) $\frac{13\frac{1}{26}-4}{4\frac{2}{3}+\frac{1}{4}}+\frac{(3\frac{1}{3}-2,3):\frac{5}{4}}{[6\frac{5}{6}-(-1,75)]\cdot 3,1+(-2,3)\cdot \frac{3}{4}}$
i) $\frac{30\cdot 4\frac{1}{4}+11\frac{1}{5}:\frac{5}{3}}{14:2\frac{2}{9}+8\frac{2}{5}\cdot 14\frac{2}{3}}:\frac{1\cdot 6+12\cdot 5}{2\frac{1}{2}\cdot 15-4\frac{13}{15}\cdot 7\frac{2}{5}}$
j) $\left[2,1:\frac{(4,5\cdot 1\frac{2}{3}+3,75)\cdot \frac{7}{135}}{1-(\frac{10}{27}:\frac{5}{6})}\right]:2,5$

Zadanie 13

Liczby $x=0,(6)$ i $y=4,(36)$ przedstaw w postaci ułamka zwykłego, a następnie oblicz: $x+y, x\cdot y, \frac{x}{y}$.

Zadanie 14

Oblicz:

- a) $27^{\frac{1}{3}}, 256^{\frac{1}{4}}, 8^{\frac{2}{3}}, 512^{\frac{1}{3}}, 32^{\frac{1}{2}}$
b) $(0,16)^{\frac{1}{4}}, (0,008)^{-\frac{1}{3}}, (\frac{49}{16})^{-\frac{1}{2}}, 16^{-\frac{3}{2}}, (1,69)^{-\frac{1}{2}}, (0,729)^{-\frac{1}{3}}$
c) $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{4}}$
d) $(2^{\frac{1}{2}})^{\frac{4}{3}}$
e) $4^{\frac{3}{4}}:4^{\frac{1}{3}}$
f) $64^{\frac{1}{2}}:64^{\frac{1}{3}}$
g) $5^{\frac{1}{2}}(5^{\frac{2}{3}}+5^{\frac{1}{4}})$
h) $(4^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{3}})^2$
i) $(2^{\frac{1}{2}}-2\cdot 2^{\frac{1}{3}}+3)\cdot (2^{\frac{2}{3}}+3\cdot 2^{\frac{1}{2}}-4)$
j) $(a^{-\frac{1}{2}}-4)\cdot (a^{-\frac{2}{3}}+a^{-2}+1)$

Zadanie 15

Uprość:

- a) $\frac{16\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{8}}{8^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt[4]{2}}$
b) $3\sqrt[4]{81}\cdot(\frac{1}{3})^{\frac{2}{3}}\cdot 9^{-\frac{3}{2}}\cdot(\frac{1}{27})^{-\frac{2}{3}}$
c) $\frac{x^{\frac{2}{3}}+3x^{\frac{5}{6}}}{x^{-\frac{1}{2}}}$
d) $\left(\frac{z^{-\frac{2}{3}}}{5^{-1}\cdot z^{\frac{1}{3}}}\right)^{-2}$
e) $(r^{-\frac{3}{4}})^{-\frac{2}{3}}\cdot(\frac{1}{r})^{-2}$

Zadanie 16

Oblicz:

- a) $\left[\left(4-7^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(4+7^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$
b) $\left[4^{-\frac{1}{4}}+(3\sqrt{3})^{-\frac{4}{3}}\right]\cdot\left[4^{-\frac{1}{4}}-(3\sqrt{3})^{-\frac{4}{3}}\right]$
c) $\left[\left(2+5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(5^{\frac{1}{2}}-2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$

Zadanie 17

Wykonaj działania:

- a) $(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})-(3+3\sqrt{3})^2$
b) $(2\sqrt{2}-1)(1-2\sqrt{2})$
c) $(3+\sqrt[3]{3})^3-(3-\sqrt[3]{3})^3$
d) $(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{7})^3-(\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{7})^3$
e) $2,5x^2-[0,6x^2-(3,5x+x^2)-(x^2+3x)]+$

- $+ [0, 1x^2 - (x^2 - 3, 5x) + x^2]$
f) $x - 1, 4xy + 1, 2y - \{1, 6xy - [0, 6y - (1, 4x - 2, 4xy)] +$
 $- (1, 4xy - 16y)\}$
g) $2, 6x - \{1, 8y - [2, 2x - (y - 0, 6x) + 1, 4y] +$
 $- [1, 6x - 0, 2x]\}$
h) $3x[5y - (7x - 4y)] - 8y[3x - (7y - 5x) + (6x - 11y)]$
i) $x^2[4, 8x^2 - 0, 6y(1, 6x - 1, 4y)] +$
 $- 1, 2y^2[3, 6x^2 - 1, 6x(0, 8x - 1, 4y) + 2, 4y^2]$
j) $1\frac{1}{3}x [4\frac{1}{2}x - (3\frac{3}{4}y - 31\frac{1}{2})] +$
 $- [13\frac{1}{3}x - (11\frac{3}{7} - 8\frac{1}{3}y)] \cdot 4\frac{1}{5}y$

Zadanie 18

Oblicz wartość wyrażen: $\sqrt{81a^2b^4}$ oraz $\sqrt{\frac{4}{25}(a \cdot b)^2}$,
 gdy:

- a)** $a \geq 0$ i $b \geq 0$
b) $a \geq 0$ i $b < 0$
c) $a < 0$ i $b < 0$

Zadanie 19

Oblicz wartość wyrażenia:

- a)** $\frac{1+a+a^2}{1+a-a^2} + \frac{b^2+b+1}{b^2-b+1}$, jeśli $a = \frac{1}{3}$; $b = -\frac{1}{3}$.
b) $\frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{4xy}$, jeśli $x = 1, 7$; $y = -0, 7$.
c) $\frac{(k-l)^3 - (k+l)(k-l)}{3kl-1}$, jeśli $k = 1\frac{1}{3}$; $l = -\frac{1}{3}$.

Zadanie 20

Oblicz:

- a)** $(2a^2b^3c)^6 \cdot (-ab^2c^2d)^4$
b) $(2xyz^2)^2 \cdot (-3x^2y^4z^5)^3 : (-3x^2yz)^3$
c) $(-3a^{m+n}b^{m-n}c) : (-1, 5a^mb^{-n})$
d) $(8x^py^nz^a) : (-4x^{p-2}y^2z^{a-4})$

Zadanie 21

Wykonaj działania i przeprowadź redukcję:

- a)** $-(3+x)^2 + 5(1-x)^2 - 3(1-x)(1+x)$
b) $4(m+3n)^2 + 3(4m-n)^2 - 2(m+n)(m-n)$
c) $-(2c+5d)(2c-5d) - 6(2d-5c)^2 + 3(5c+2d)^2$
d) $[(3x+y)^2 - (x+3y)^2]2xy$

Zadanie 22

Uprość i oblicz wartość otrzymanego wyrażenia:

- a)** $3(m-1)^2 + (m+2)(m^2-2m+4) - (m+1)^3$
 dla $m = -\frac{1}{3}$,
b) $(a-1)^3 - 4a(a+1)(a-1) + 3(a-1)(a^2+a+1)$
 dla $a = -2$.

Zadanie 23

Wykonaj działania i przeprowadź redukcję:

- a)** $(a^2-3)^3 - (a-2)(a^2+4)(a+2)$
b) $(2a-3)^3 - 4a(2a+3)(2a-3) + (3-2a)^2$
c) $(x^2-1)(x^4+x^2+1) - (x^2-1)^3$

Zadanie 24

Rozwiąż równania, w których niewiadomą jest x :

- a)** $17mx - 3am + 5bm - 8mx = 10mx - 5am + 7bm + mx$
b) $ax + bx = m + x$
c) $a(x-1) - b = x - a$
d) $(x-a)(x-b) = x^2 - a^2$
e) $\frac{a-bx}{c} + x = \frac{cx-b}{c}$
f) $\frac{x+a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{x-b}{a} + \frac{a}{b}$
g) $\frac{ax-b^2}{a} - \frac{a(b-x)}{b} + \frac{b^2}{a} = a$

Zadanie 25

Oblicz a z równań:

- a)** $(a+2\sqrt{3})(3-\sqrt{3}) = 9 + \sqrt{3}$
b) $(3-a\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) = \sqrt{2}$
c) $(2-\sqrt{5})(a+\sqrt{5}) = 1 + \sqrt{5}$
d) $(13-\sqrt{5})(3+\sqrt{5}) = 4 + a\sqrt{5}$

Zadanie 26

Rozwiąż nierówności:

- a)** $(x-1)^2 + 7 > (x+4)^2$
b) $(1+x)^2 + 3x^2 < (2x-1)^2 + 7$
c) $(x-4)^2 + 6 < x^2 + 2x + 2$
d) $\frac{3x-7}{2} + x < 2(x-1)$
e) $\frac{4x+1}{2} > \frac{x+4}{5}$

Zadanie 27

Znajdź liczby spełniające nierówności:

- a)** $3 + \frac{3x+1}{2} + \frac{x-3}{3} < 4$
b) $\frac{5-4x}{5} + x < -3x + \frac{1}{6}$
c) $(x-3)^3 + 9x^2 - 5x + 2 > x^3 - 8$
d) $\frac{2x^2}{8} - \frac{-x+4}{3} + \frac{2x-5}{2} < \frac{x^2}{4} + 3x - 2$

Zadanie 28

Oblicz:

- a)** 4% liczby 58,
b) $3\frac{1}{2}\%$ liczby $30\frac{1}{4}$,
c) 125% liczby 45,
d) 104,5% liczby 25000,
e) 0,25% liczby 120,
f) $a\%$ liczby b .

Zadanie 29

Znajdź:

- a)** liczbę, której 5% wynosi 14,
b) liczbę, której 0,2% wynosi $1\frac{2}{5}$,
c) liczbę, której 128% wynosi 512,
d) liczbę, której $p\%$ wynosi a .

Zadanie 30

Jakim procentem liczby a jest liczba b , gdy:

- a) $a = 14$, $b = 112$;
 b) $a = 125$, $b = 50$;
 c) $a = 0, 15$, $b = 0, 75$.

Zadanie 31

- a) Zmieszano 2 kg stopu o zawartości 25% miedzi i 3 kg stopu o zawartości 40% miedzi. Ile procent miedzi zawiera otrzymany stop?
 b) Zmieszano a kg stopu o zawartości $p\%$ miedzi i b kg stopu o zawartości $q\%$ miedzi. Ile procent miedzi zawiera otrzymany stop?
 c) Cenę towaru obniżono o $p\%$. Towar ten kosztuje obecnie a zł. Ile kosztował ten towar przed obniżką?
 d) Cenę towaru onizono najpierw o 20%, a następnie nową cenę podwyższono o 20%. Czy końcowa cena jest równa początkowej?
 e) Średnia płaca w pewnej spółce zatrudniającej 20 pracowników wynosiła 2000 zł. Po zatrudnieniu jednego nowego pracownika średnia płaca w spółce zwiększyła się o 0,06%. Jaką stawkę otrzymał nowy pracownik?
 f) Liczba uczestników dyskoteki zmniejszyła się o 30%, natomiast procent dziewcząt zmienił się z 40% na 45%. Co stało się z liczbą dziewcząt na dyskotecie. Jak zmieniła się i o ile procent?

Zadanie 32

Liczba przekątnych n -kąta wypukłego jest równa:

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

- a) Ile przekątnych ma dwunastokąt wypukły?
 b) Który wielokąt wypukły ma 65 przekątnych, a który 170 przekątnych?

Zadanie 33

Korzystając ze wzoru $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$, oblicz:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 10}$$

Zadanie 34

Każdy ułamek postaci $\frac{2}{n}$, gdzie n jest liczbą nieparzystą, można przedstawić w postaci: $\frac{2}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, gdzie $a = \frac{n+1}{2}$, $b = \frac{n(n+1)}{2}$

Ułamki, których licznik wynosi 1, są nazywane ułamekami **egipskimi** (albo prostymi). Przedstaw jako sumę ułamków egipskich liczby:

- a) $\frac{2}{11}$ b) $\frac{2}{17}$ c) $\frac{2}{31}$

Zadanie 35

Woda płynąca z kranów A, B i C może napęlnić basen w ciągu 4 godzin. Woda tylko z kranu A napęlnia w ciągu godziny $\frac{1}{10}$ basenu, a tylko z kranu

$B - \frac{1}{12}$ basenu. Ile czasu trwałoby napęlnianie basenu wodą tylko z kranu C ?

Zadanie 36

Woda płynąca z kranu A napęlnia zbiornik w ciągu 6 godzin. By napęlnić ten sam zbiornik wodą z kranu B , potrzeba 9 godzin. Ile czasu zajmie napęlnianie zbiornika, jeśli kran B odkręcono 4 godziny po odkręceniu kranu A ?

Zadanie 37

Wskaż liczbę niewymierną x taką, aby wartość poniższego wyrażenia była liczbą wymierną:

- a) $\frac{\sqrt{11}}{x}$ b) $\sqrt{1+x^2}$ c) $\frac{2x}{\pi+3}$ d) $\sqrt{111+x}$

Zadanie 38

Wykaż, że jeśli a i b są liczbami dodatnimi, takimi że $a \geq b$, to:

$$\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} - \sqrt{a+b-2\sqrt{ab}} = 2\sqrt{b}$$

Zadanie 39

Oblicz obwód i pole kwadratu, którego przekątna ma długość $2cm$.

Zadanie 40

Balonik o kształcie kuli napompowano tak, że jego powierzchnia wzrosła o 44%. O ile wzrosła jego objętość?

Przypomnienie: Pole kuli o promieniu r : $P = 4\pi r^2$, objętość: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Zadanie 41

Czy w pudełku o wymiarach $0,2\text{ m} \times 0,3\text{ m} \times 0,4\text{ m}$ zmieści się piłka o objętości 4 dm^3 ?

Objętość kuli: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Zadanie 42

Przyjmując, że krok dorosłego człowieka ma 75cm, oszacuj, ile kroków należy zrobić, by przejść odległość równą odległości, jaką Ziemia pokonuje w ciągu roku po orbicie dookoła Słońca. Przyjmij, że orbitą Ziemi jest okrąg, a odległość Ziemi od Słońca wynosi 150 mln km.