

Funkcje trygonometryczne kąta dowolnego

Zadanie 1

Dla jakich wartości $\alpha \in \langle 0^\circ, 360^\circ \rangle$ prawdziwe są następujące warunki:

- a) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha > 0$
- b) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0$
- c) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha > 0$
- d) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 0$
- e) $\operatorname{tg} \alpha > 1$
- f) $\operatorname{ctg} \alpha < \sqrt{3}$
- g) $\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{ctg} \alpha$

Zadanie 2

Wyznacz kąt $\alpha \in \langle 0^\circ, 360^\circ \rangle$, dla którego:

- a) $\operatorname{tg} \alpha = 1$ i $\cos \alpha < 0$
- b) $\operatorname{ctg} \alpha = -1$ i $\cos \alpha > 0$
- c) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\cos \alpha < 0$
- d) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\sin \alpha < 0$
- e) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ i $\operatorname{tg} \alpha < 0$
- f) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\operatorname{ctg} \alpha > 0$

Zadanie 3

Ramię początkowe kąta α pokrywa się z dodatnią półosią OX . Podaj równanie prostej, w której zawiera się ramię końcowe kąta α , jeśli:

- a) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{7}{3}$
- b) $\operatorname{ctg} \alpha = -3$
- c) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ i $\cos \alpha < 0$
- d) $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ i $\sin \alpha < 0$

Zadanie 4

Dla danego równania oblicz sumę pierwiastków należących do przedziału $\langle 0, 6\pi \rangle$.

- a) $\sin x = \frac{1}{2}$
- b) $\cos x = \frac{1}{2}$
- c) $\sin x = -\frac{1}{2}$
- d) $\cos x = -\frac{1}{2}$
- e) $\sin x = 0,7$
- f) $\cos x = -0,7$

Zadanie 5

Ile punktów wspólnych mają wykresy funkcji f i g w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$?

- a) $f(x) = \sin x, \quad g(x) = \cos x$
- b) $f(x) = \sin x, \quad g(x) = -\sin x$

c) $f(x) = \sin x, \quad g(x) = 2 - \sin x$

d) $f(x) = \cos x, \quad g(x) = 1 - \sin x$

Zadanie 6

Podaj zbiór wartości funkcji:

- a) $y = \sin x + 1$
- b) $y = \sin x - 3$
- c) $y = \cos x - \frac{1}{2}$
- d) $y = -\cos x$
- e) $y = 3 - \cos x$
- f) $y = -1 - \sin x$
- g) $y = 2 - \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
- h) $y = \sin^2 x + 1$
- i) $y = 1 - \cos^2 x$

Zadanie 7

Sprawdź parzystość funkcji:

- a) $f(x) = x \operatorname{tg} x$
- b) $f(x) = x \operatorname{ctg} x$
- c) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$
- d) $f(x) = \frac{\operatorname{ctg} x}{x}$
- e) $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$
- f) $f(x) = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x$
- g) $f(x) = \operatorname{tg}^3 x$
- h) $f(x) = \frac{\cos x}{\operatorname{tg} x}$
- i) $f(x) = \frac{\cos x}{1 + 4 \operatorname{tg}^2 x}$

Zadanie 8

Zbadaj, które z określonych niżej funkcji są parzystymi, a które nieparzystymi:

- a) $y = \sin 2x$
- b) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$
- c) $y = \sin^3 x$
- d) $y = \sin x + \cos x$
- e) $y = x \sin x$
- f) $y = x \cos x$
- g) $y = x^2 \operatorname{tg} x$
- h) $y = |1 + \cos x|$
- i) $y = \frac{\operatorname{ctg} x}{x}$
- j) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$
- k) $y = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x$
- l) $y = \operatorname{tg}^3 x$
- m) $y = \frac{\cos x}{\operatorname{tg} x}$

n) $y = \frac{\cos x}{1+4tg^2 x}$

Zadanie 9

Sporządź wykres funkcji dla $x \in \langle -2\pi, 2\pi \rangle$.

a) $y = -\cos 2x$

b) $y = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$

c) $y = \sin x + |\sin x|$

d) $y = \frac{|\cos x|}{\cos x}$

e) $y = 2\sin x \cdot |\cos x|$

f) $y = |\sin x| + |\cos x|$

Zadanie 10

Naszkicuj wykres funkcji:

a) $y = 1 - tg\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

b) $y = tg\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1$

c) $y = -ctg\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$

d) $y = ctg\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + 1$

Zadanie 11

Rozwiąż równanie:

a) $\sin 2x = \cos x$

b) $\sin x + \sin 2x = 0$

c) $tg^3 x = 3tg x$

d) $4\sin x \cos^2 x = \sin x$

e) $\sin x \cos x - \sin x = \cos x - 1$

f) $2\sin 2x + 2\sin x = 2\cos x + 1$

g) $2\sin x \cos^2 x + \sin x = 3\sin x \cos x$

h) $2\sin^2 x \cos x - \sin x \cos x = \cos x$

i) $\sin 2x = 1$

j) $\cos 3x = -\frac{1}{2}$

k) $tg \frac{x}{2} = -1$

l) $ctg \frac{x}{3} = 0$

m) $\sin(2x - 1) = 1$

n) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

o) $\frac{1}{3}\sin\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = -\frac{1}{6}$

p) $\frac{\cos x}{1+tg x} = 0$

r) $\frac{\sin x}{1-\cos x} = 0$

s) $\frac{tg x}{tg x + ctg x} = 0$

t) $5tg\left(\frac{1}{4}x - \frac{\pi}{5}\right) = -5$

u) $2\cos\left(\frac{x}{6} + \frac{\pi}{5}\right) = -1$

w) $tg(x^2) = 0$

v) $\cos(x^2) = \frac{1}{2}$

x) $\sin^3 x + \cos^3 x = \cos x$

y) $tg x + tg 2x = tg 3x$

z) $\sin x - \cos 2x + \sin 3x = 1$

Zadanie 12

Wyznacz rozwiązania równania:

a) $ctg x + \frac{\sin x}{1+\cos x} = 2$

b) $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sin x}$

c) $\cos^2 x + \sin x \cos x = 0$

d) $\sin 3x = \cos 2x$

e) $\sin 4x = 2\cos x \cos 2x$

f) $1 + \sin 2x = \cos 2x$

g) $tg^3 x = tg x$

h) $tg^2 x - 2tg x + 1 = 0$

i) $tg^3 x + tg^2 x - 3tg x = 3$

j) $\sin^2 x + 3\sin x + 2 = 0$

k) $\cos^2 2x + 4\cos^2 x = 2$

l) $2\cos^2 x = \sin 2x tg x$

m) $2\cos 2x + 3 = 4\cos x$

n) $\frac{2}{1-tg^2 x} + \frac{1-tg^2 x}{2} = 2$

o) $\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$

p) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1$

r) $5\sin x - \frac{3}{\sin x} = 2$

s) $\sin^3 x = 12\sin^2 x$

t) $2\sin^3 x - \sin x \cos x - 3\sin x = 0$

u) $4\sin^3 x - 4\sin^2 x + 3\sin x = 3$

w) $2\sin^5 x = 3\sin^3 x - \sin x$

v) $\cos 4x + 2\cos^2 x = 1$

x) $\sin 3x - \sin x = \sin 2x$

y) $\cos 2x - \cos 6x = \sin 3x + \sin 5x$

z) $\cos 5x - \cos x = \sin 3x$

ż) $\cos 2x + \cos 6x = \sin 3x - \sin 5x$

ž) $\cos 3x + \sin 3x = \cos x + \sin x$

Wskazówka do punktu d) Skorzystaj ze wzoru:
 $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Zadanie 13

Oblicz pierwiastki równania:

a) $\sin x + \cos x = 1$

b) $3\cos x + 4\sin x = 5$

c) $\sqrt{3}\cos x + \sin x = \frac{7}{4}$

d) $\sqrt{3}\cos x + \sin x - \sqrt{2} = 0$

e) $3\sin x - 5\cos x = 0$

f) $\sin x + \cos x + 2\sin x \cos x = 1$

g) $\sin x + \cos x = \frac{\cos 2x}{1-\sin 2x}$

h) $2\cos x = 1 + \sin x$

Zadanie 14

Wyznacz rozwiązanie zawarte w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$ każdej z podanych niżej nierówności:

a) $\sin^2 x < 1$

b) $\cos^2 x < 1$

c) $tg^2 x > 1$

d) $ctg^2 x > 3$

e) $|\sin x| > |\cos x|$

f) $ctg x < 2 - \frac{\sin x}{1+\cos x}$

g) $\frac{\sin x + \cos x}{\cos 2x} \geq 0$

h) $\sin^3 x \cos x - \cos^3 x \sin x \leq \frac{1}{4}$

i) $\cos 4x + 2\cos^2 x \geq 1$

- j) $\frac{1}{2} < 2 + \sin x - \cos x < \frac{7}{2}$
 k) $\cos x \operatorname{ctg} 2x \leq 0$
 l) $\sin^3 x - 4\sin^2 x - \sin x + 4 \leq 0$
 m) $\cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x + \dots < 1 + \cos x$

Zadanie 15

Rozwiąż nierówności, gdy $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

- a) $\operatorname{tg} 2x > -1$
 b) $\sqrt{3} \operatorname{tg} 2x \leq 1$
 c) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} > 1$
 d) $\operatorname{tg}^2 x - 1 > 0$
 e) $\operatorname{ctg} 4x \geq \sqrt{3}$
 f) $|\operatorname{ctg} 2x| \geq 1$

Zadanie 16

Podaj rozwiązania nierówności należące do przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$.

- a) $\sin(x - \frac{\pi}{6}) < \frac{1}{2}$
 b) $2\sin(x + \frac{\pi}{3}) \geq 1$
 c) $2\cos(\frac{\pi}{3} - x) \leq -\sqrt{3}$

Zadanie 17

Korzystając z zależności między funkcjami trygonometrycznymi kąta α i kąta $90^\circ - \alpha$, oblicz:

- a) $\sin 40^\circ - \cos 50^\circ$
 b) $\frac{\sin 29^\circ}{\cos 61^\circ}$
 c) $(\sin 20^\circ + \cos 20^\circ)(\sin 20^\circ - \cos 20^\circ) + 2\sin^2 70^\circ$
 d) $\sin^2 55^\circ + \sin^2 35^\circ$
 e) $\operatorname{tg} 44^\circ \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} 46^\circ$

Zadanie 18

Oblicz bez użycia tablic:

- a) $\sin^2 62^\circ + \sin^2 28^\circ$
 b) $\operatorname{tg} 44^\circ \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} 46^\circ$
 c) $(\sin 35^\circ + \cos 35^\circ)(\sin 35^\circ - \cos 35^\circ) + 2\sin^2 55^\circ$

Zadanie 19

Oblicz nie korzystając z kalkulatora i tablic matematycznych wartość wyrażenia:

- a) $\frac{\sin^2 120^\circ \cdot \cos(-180^\circ)}{\operatorname{tg}(-135^\circ) \operatorname{ctg} 405^\circ}$
 b) $\frac{9\sin^2 150^\circ - 4\cos 240^\circ + 12\sin 600^\circ}{3\sin(-45^\circ) - 2\cos(-420^\circ)}$
 c) $\operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 50^\circ \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} 70^\circ \operatorname{tg} 80^\circ$

Zadanie 20

Oblicz wartość liczbową wyrażenia:

- a) $5\sin 30^\circ + 4\cos 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ$
 b) $3\sin 60^\circ - 5\cos 45^\circ + 2\operatorname{tg} 30^\circ$
 c) $\sin^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ + \operatorname{ctg}^2 45^\circ$
 d) $\frac{3\sin 60^\circ}{\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ}$
 e) $\frac{\operatorname{ctg}^2 60^\circ + \cos^2 30^\circ}{3 - 2\operatorname{ctg} 45^\circ}$

f) $\frac{2 - \operatorname{tg}^2 60^\circ}{\sin 30^\circ \cos 60^\circ}$

Zadanie 21

Sprawdź następujące tożsamości:

- a) $(\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cdot \operatorname{ctg}^2 \alpha = \sin^2 \alpha$
 b) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2$
 c) $(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha) = \sin^2 \alpha$
 d) $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$
 e) $\frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha = \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$
 f) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

Zadanie 22

Uzasadnij, że zachodzi równość:

- a) $1 + \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha}$
 b) $\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$
 c) $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^2 = \frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$
 d) $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha = (\operatorname{tg} \alpha - 1)(\operatorname{ctg} \alpha + 1)$
 e) $\operatorname{ctg} \alpha + \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha}$
 f) $(1 + \sin \alpha) \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \operatorname{tg} \alpha \right) = \cos \alpha$
 g) $\frac{\operatorname{tg} \alpha (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha)}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$

Zadanie 23

Wykaż, że równość jest tożsamością:

- a) $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2}{\sin \alpha}$
 b) $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$
 c) $\left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha} \right) (\sin \alpha + \cos \alpha) = 2 + \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$
 d) $\left(\frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\cos \alpha} \right) (\sin \alpha + \cos \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha$
 e) $1 - 2\sin^2 \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$

Zadanie 24

Sprawdź prawdziwość następujących równości:

- a) $\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$
 b) $\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha} = \sin \alpha \cdot \cos \alpha$
 c) $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$
 d) $\frac{\sin \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha}$
 e) $\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha$
 f) $\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$
 g) $(1 + \operatorname{tg} \alpha)^2 + (1 - \operatorname{tg} \alpha)^2 = \frac{2}{\cos^2 \alpha}$

Zadanie 25

Posługując się wzorami na funkcje sumy lub różnicy kątów, wykaż:

- a) $\sin(45^\circ - \alpha) = \cos(45^\circ + \alpha)$
 b) $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$
 c) $\sin(270^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$
 d) $\sin(30^\circ + \alpha) + \sin(30^\circ - \alpha) = \cos \alpha$

- e) $\cos(30^\circ - \alpha) - \cos(30^\circ + \alpha) = \sin \alpha$
f) $\cos \alpha + \cos(120^\circ + \alpha) + \cos(120^\circ - \alpha) = 0$
g) $\sin \alpha + \sin(120^\circ + \alpha) - \sin(120^\circ - \alpha) = 0$
h) $\frac{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)} = \operatorname{tg} \alpha$

Zadanie 26

Oblicz bez użycia tablic:

- a) $\sin 15^\circ$
b) $\cos 75^\circ$
c) $\sin 105^\circ$
d) $\operatorname{tg} 105^\circ$

Zadanie 27

Przedstaw w postaci iloczynu:

- a) $1 - \sin \alpha$
b) $1 - \cos \alpha$
c) $1 - 2\cos \alpha + \cos 2\alpha$
d) $\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha$
e) $1 + 2\sin \alpha - \cos 2\alpha$
f) $1 - \sin \alpha + \cos \alpha$
g) $3 - 4\sin^2 \alpha$
h) $3 - 4\cos^2 \alpha$

Zadanie 28

Oblicz dokładną wartość wyrażenia:

- a) $\sin 105^\circ + \sin 15^\circ$
b) $\sin 75^\circ - \sin 15^\circ$
c) $\sin 15^\circ + \cos 15^\circ$
d) $\cos 75^\circ - \cos 15^\circ$
e) $\cos 105^\circ - \cos 15^\circ$
f) $\cos 75^\circ - \sin 15^\circ$

Zadanie 29

Wykaż, że:

- a) $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \cdot \cos(\alpha - 45^\circ)$
b) $\sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2} \cdot \sin(\alpha - 45^\circ)$

Zadanie 30

Sprowadź do prostszej postaci:

- a) $-2\sin\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$
b) $\sin(30^\circ + \alpha) + \sin(30^\circ - \alpha)$
c) $\sin(60^\circ + \alpha) - \sin(60^\circ - \alpha)$
c) $\cos(45^\circ + \alpha) - \cos(45^\circ - \alpha)$