

Funkcje wymierne

Zadanie 1

Punkt o współrzędnych (k, l) należy do hiperboli $y = \frac{a}{x}$. Które z punktów $P(-k, -l)$, $Q(-l, -k)$, $R(-3l, -\frac{k}{3})$, $S(k, -l)$, $T(l, k)$, $U\left(\frac{\sqrt{2}}{4}k, \sqrt{8}l\right)$ należą do tej hiperboli?

Zadanie 2

Punkt P należy do hiperboli $y = \frac{a}{x}$, jego współrzędne są dwoma różnymi pierwiastkami równania $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6 = 0$. Wyznacz a (rozważ dwa przypadki).

Zadanie 3

Podaj dziedzinę wyrażenia wymiernego i przedstaw je w prostszej postaci:

- a) $\frac{(a+4)^2}{a^2+5a+4}$
- b) $\frac{a^2-25}{a^2+4a-5}$
- c) $\frac{a^2+a-2}{a^2+2a-3}$
- d) $\frac{4b^2+4b+1}{2b^2+3b+1}$
- e) $\frac{a^3-1}{a^2-2a+1}$
- f) $\frac{a^4-5a^3+6a^2}{a^3-6a^2+8a}$
- g) $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}$
- h) $\frac{4a^2-b^2}{4a^2+4ab+b^2}$
- i) $\frac{(-2a^2b)^3}{4a^5b^2}$
- j) $\frac{(2ab)^4}{(2a^2b)^2}$
- k) $\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$
- l) $\frac{a^3b^2+8a^3b+16a^3}{3a^2b+12b^2}$
- m) $\frac{(x+4)^2}{x^2+5x+4}$
- n) $\frac{x^2-25}{x^2+4x-5}$
- o) $\frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$
- p) $\frac{4x^2+4x+1}{2x^2+3x+1}$
- q) $\frac{x^3-1}{x^2-2x+1}$
- r) $\frac{x^4-5x^3+6x^2}{x^3-6x^2+8x}$

- s) $\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}$
- t) $\frac{4x^2-y^2}{4x^2+4xy+y^2}$
- u) $\frac{(-2x^2y)^3}{4x^5y^2}$
- v) $\frac{(2xy)^4}{(2x^2y)^2}$
- w) $\frac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2}$
- x) $\frac{x^3y^2+8x^3y+16x^3}{3x^2y+12x^2}$
- y) $\frac{5x^2y}{10x^3y}$
- z) $\frac{12x^2yz}{18x^2y^3z}$
- ż) $\frac{7x^3y^5(a+b)}{21x^2y^3(a+b)}$
- ź) $\frac{a-b}{b-a}$

Zadanie 4

Skróć wyrażenia wymierne (pamiętaj o ich dziedzinie):

- a) $\frac{ac-bc}{ac+bc}$
- b) $\frac{a^2+3ab}{a^2b+3ab}$
- c) $\frac{x^2-2xy}{xy-2y^2}$
- d) $\frac{x^3-2x^2}{2x^3y^2-x^4y}$
- e) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$
- f) $\frac{a^3-b^3}{2a-2b}$
- g) $\frac{x^2+5x+6}{x^2+4x+4}$
- h) $\frac{x^2+3x+2}{x^2+6x+5}$
- i) $\frac{x^2-7x+12}{x^2-6x+9}$
- j) $\frac{x^2+2x+1}{x^2+8x+7}$
- k) $\frac{2xy-x^2-y^2+z^2}{x^2+z^2-y^2+2xz}$
- l) $\frac{x^3-x^2b+xy^2}{y^3+x^3}$

Zadanie 5

Wykonaj działania:

- a) $\frac{7x}{x^2-9} + \frac{5x}{x-3} - \frac{x}{x+3} - 2$

- b) $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} - \frac{x+y}{2x-2y} + 1$
 c) $\frac{7}{2x-4} - \frac{3}{x+2} - \frac{12}{x^2-4} + x$
 d) $\frac{7}{8x^2-18y^2} + \frac{1}{2x^2+3xy} - \frac{1}{4xy-6y^2} - 2x$
 e) $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y}$
 f) $\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y}$
 g) $\frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2}$
 h) $\frac{x}{x-y} + \frac{y}{x+y} + \frac{2xy}{x^2-y^2}$
 i) $\frac{y^2-1}{xy^3} - \frac{x^2-1}{x^3y}$
 j) $\frac{3x}{2x-y} - \frac{3x}{2x+y} + \frac{4xy}{4x^2-y^2}$
 k) $\frac{2-x}{x^2+x-2} + \frac{x}{x^2-x-6}$
 l) $\frac{4x}{x^2-7x+12} + \frac{5x}{x^2-8x+15}$
 m) $\frac{2}{x^2-6x+5} - \frac{1}{x^2-2x+1}$
 n) $\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{x-2x^2}{x^3-1}$
 o) $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y}$
 p) $\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y}$
 q) $\frac{y^2-1}{xy^3} - \frac{x^2-1}{x^3y}$
 r) $\frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2}$
 s) $\frac{x}{x-y} + \frac{y}{x+y} + \frac{2xy}{x^2-y^2}$
 t) $\frac{3t}{2t-s} - \frac{3t}{2t+s} + \frac{4ts}{4t^2-s^2}$
 u) $\frac{y+3}{x^2} \cdot \frac{x^3}{y^2+6y+9}$
 v) $\frac{x^3-y^3}{x+y} \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+xy+y^2}$
 w) $\frac{4y^2-9}{4x} \cdot \frac{6x^2}{3-2y}$
 x) $\frac{(x+y)^3}{x^2+2xy+y^2} \cdot \frac{x^2+y^2}{x^4-y^4}$
 y) $\frac{x^2-y^2}{x+2y} : \frac{4y^2-4x^2}{x^2+4xy+4y^2}$
 z) $\frac{x^2-4xy}{5x} : \frac{x-4y}{20xy}$
 ż) $\frac{x^3-y^3}{x+y} \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+xy+y^2}$
 ź) $\frac{(x+y)^3}{x^2+2xy+y^2} \cdot \frac{x^2+y^2}{x^4-y^4}$

Zadanie 6

Zapisz w prostszej postaci:

- a) $(a + \frac{2}{a})^2 - (\frac{a^2-2}{a})^2$
 b) $(\frac{3}{x} + \frac{x}{3})^2 - (\frac{x}{3} - \frac{3}{x})^2$

Zadanie 7

Wyznacz dziedzinę następujących funkcji wymiernych:

- a) $f(x) = \frac{1}{x+1}$

- b) $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-1}$
 c) $f(x) = \frac{x-5}{x^2}$
 d) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-5x+6}$
 e) $f(x) = \frac{x+1}{2x+6}$
 f) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$
 g) $f(x) = \frac{1}{x+1}$
 h) $f(x) = \frac{x^4+2}{x^4-16}$

Zadanie 8

Aby uzyskać przedstawienie funkcji homograficznej $f(x) = \frac{3x-10}{x-4}$ w postaci $f(x) = \frac{r}{x-4} + q$, możemy wykonać dzielenie:

$$(3x - 10) : (x - 4) = 3 \text{ reszta } 2.$$

Zatem $f(x) = \frac{2}{x-4} + 3$. Możemy też dokonać następujących przekształceń:

$\frac{3x-10}{x-4} = \frac{3(x-4)+2}{x-4} = \frac{3(x-4)}{x-4} + \frac{2}{x-4} = \frac{2}{x-4} + 3$. Wykonaj odpowiednie dzielenie lub przekształcenia i przedstaw funkcję f w postaci $f(x) = \frac{r}{x+3} + q$.

- a) $f(x) = \frac{4x+9}{x+3}$
 b) $f(x) = \frac{\frac{1}{3}x-5}{x+3}$
 c) $f(x) = \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}x}{x+3}$

Zadanie 9

Funkcja homograficzna $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ma asymptotę pionową $x = -\frac{d}{c}$ i asymptotę poziomą $y = \frac{a}{c}$. Podaj równania asymptot funkcji f .

- a) $f(x) = \frac{-6x+9}{3x+6}$
 b) $f(x) = \frac{10x+1}{\frac{1}{2}x-4}$
 c) $f(x) = \frac{-\frac{1}{2}x+7}{10-2x}$

Zadanie 10

Naszkicuj wykres funkcji.

- a) $f(x) = \frac{3x-9}{x-3}$
 b) $f(x) = \frac{-2x-8}{\frac{1}{2}x+2}$
 c) $f(x) = \frac{x-2}{4-2x}$
 d) $f(x) = \frac{4x+9}{x+3}$
 e) $f(x) = \frac{\frac{1}{3}x-5}{x+3}$
 f) $f(x) = \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}x}{x+3}$

Zadanie 11

Podaj współrzędne wektora $\vec{v}$ o jaki należy przesunąć wykres funkcji f , aby otrzymać wykres funkcji g :

a) $g(x) = \frac{-6x+9}{3x+6}$

b) $g(x) = \frac{10x+1}{\frac{1}{2}x-4}$

c) $g(x) = \frac{-\frac{1}{2}x+7}{10-2x}$

Zadanie 12

Rozwiąż równania:

a) $\frac{3x-8}{x+3} = 0$

b) $\frac{3}{x+2} = 2$

c) $\frac{3x+2}{3x-2} = \frac{3}{2}$

d) $\frac{3}{x} = \frac{2}{3x} + 1$

e) $6 - \frac{2-5x}{3x-1} = 4$

f) $\frac{8+3x}{2x+6} - \frac{2x-5}{4x-2} = 0$

g) $\frac{3x+5}{2x+3} - \frac{x-2}{2x-3} = \frac{3}{2}$

h) $|\frac{5}{x-2}| = 1$

i) $|\frac{2x+5}{x-4}| = \frac{3}{4}$

j) $|\frac{5x-2}{7-3x} - 2| = 1$

Zadanie 13Dla jakich x zachodzi nierówność $f(x) \geq g(x)$?

a) $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}, g(x) = \frac{x+5}{x-2}$

b) $f(x) = \frac{x}{x+3}, g(x) = \frac{-6-x}{x+3}$

Zadanie 14

Rozwiąż nierówności:

a) $\frac{3x^2-9x+2}{x^2-3x+3} > 2$

b) $\frac{2x^2-x+1}{x^2+4x+5} < 1$

c) $\frac{5x^2-14x-27}{x^2-2x-8} \leq 4$

d) $\frac{-2x^2+17x+15}{x^2-5x-6} > -3$

e) $\frac{5x^2}{x^4+4} \geq 1$

f) $\frac{x^4}{8x^2+9} \leq 1$

g) $\frac{x}{x-2} + \frac{1}{x+4} < \frac{4x}{x^2+2x-8}$

h) $\frac{x+1}{x+3} + \frac{6}{x-2} < \frac{x-21}{x^2+x-6}$

i) $1 + \frac{2}{x-5} + \frac{1}{x+1} \geq \frac{-x-7}{x^2-4x-5}$

j) $\frac{x-4}{x-5} - \frac{2}{x-3} < \frac{8}{x^2-8x+15}$

k) $\frac{6-2x}{x^2-2x-3} \leq \frac{1}{x-3} - \frac{x}{x+1}$

l) $\frac{1}{x^3-1} + \frac{x}{x^2+x+1} \geq \frac{1}{x-5}$

Zadanie 15

Z miejscowości A i B oddalonych od siebie o 182 km wyjeżdżają naprzeciw siebie dwaj rowerzyści. Rowerzysta jadący z miejscowości B do miejscowości A jedzie ze średnią prędkością mniejszą od 25 $\frac{km}{h}$.

Rowerzysta jadący z miejscowości A do miejscowości B wyjeżdża o 1 godzinę wcześniej i jedzie ze średnią prędkością o 7 $\frac{km}{h}$ większą od średniej prędkości drugiego rowerzysty. Rowerzyści spotkali się w takim miejscu, że rowerzysta jadący z miejscowości A przebył do tego miejsca $\frac{9}{13}$ całej drogi z A do B. Z jakimi średnimi prędkościami jechali obaj rowerzyści?

Zadanie 16

Dwa pociągi osobowe jechały z miast A i B oddległych od siebie o 616 km. Pociąg jadący z miasta A do miasta B wyjechał o godzinę wcześniej niż pociąg jadący z miasta B do miasta A i jechał z prędkością o 11 $\frac{km}{h}$ mniejszą. Pociągi te dojechały do celu w tym samym momencie. Oblicz, z jakimi prędkościami jechały te pociągi.

Zadanie 17

Uczeń przeczytał książkę liczącą 480 stron, przy czym każdego dnia czytał jednakową liczbę stron. Gdyby czytał każdego dnia o 8 stron więcej, to przeczytałby tę książkę o 3 dni wcześniej. Oblicz, ile dni uczeń czytał tę książkę.

Zadanie 18

Samochód przejechał 180 km, jadąc ze stałą prędkością. Gdyby jechał z prędkością o 30 $\frac{km}{h}$ większą, to czas przejazdu skróciłby się o godzinę. Z jaką prędkością jechał samochód?

Zadanie 19

Droga z miasta A do miasta B ma długość 474 km. Samochód jadący z miasta A do miasta B wyrusza godzinę później niż samochód z miasta B do miasta A. Samochody te spotykają się w odległości 300 km od miasta B. Średnia prędkość samochodu, który wyjechał z miasta A, liczona od chwili wyjazdu z A do momentu spotkania, była o 17 $\frac{km}{h}$ mniejsza od średniej prędkości drugiego samochodu liczonej od chwili wyjazdu z B do chwili spotkania. Oblicz średnią prędkość każdego samochodu do chwili spotkania.

Zadanie 20

Z dwóch miast A i B, oddległych od siebie o 18 kilometrów, wyruszyli naprzeciw siebie dwaj turyści. Pierwszy turysta wyszedł z miasta A o jedną godzinę wcześniej niż drugi z miasta B. Oblicz prędkość, z jaką szedł każdy turysta, jeżeli wiadomo, że po spotkaniu pierwszy turysta szedł do miasta B jeszcze 1,5 godziny, drugi zaś szedł jeszcze 4 godziny do miasta A.

Zadanie 21

Pewien turysta pokonał trasę 112 km, przechodząc każdego dnia tę samą liczbę kilometrów. Gdyby mógł przeznaczyć na tę wędrowkę o 3 dni więcej, to w ciągu każdego dnia mógłby przechodzić o 12 km mniej. Oblicz, ile kilometrów dziennie przechodził ten turysta.

Zadanie 22

Miasto A i miasto B łączy linia kolejowa długości 210 km. Średnia prędkość pociągu pospiesznego na tej trasie jest o $24 \frac{km}{h}$ większa od średniej prędkości pociągu osobowego. Pociąg pospieszny pokonuje tę trasę o 1 godzinę krócej niż pociąg osobowy. Oblicz czas pokonania tej drogi przez pociąg pospieszny.

Zadanie 23

Za wynajęcie autobusu na wycieczkę uczniowie klasy IA mieli zapłacić 1800 złotych. Ponieważ 4 uczniów zrezygnowało z tej wycieczki, każdy z pozostałych uczniów zapłacił o 15 zł więcej. Oblicz, ilu uczniów jest w klasie IA.

Zadanie 24

Dwa kombajny, pracując jednocześnie, mogą zebrać zboże z pewnego pola w ciągu 20 godzin. Pierwszy, pracując oddzielnie, potrzebuje na wykonanie tej pracy o 30 godzin mniej niż drugi. W ciągu ilu godzin może zebrać zboże z tego pola każdy kombajn, pracując oddzielnie?

Zadanie 25

Dwa procesory, pracując jednocześnie, wykonały pewne obliczenia w ciągu 0,2 godziny. Gdyby najpierw pierwszy procesor wykonał połowę tych obliczeń, a następnie drugi resztę, wówczas zużyłby na to łącznie 25 minut. W ciągu ilu minut każdy procesor, pracując oddzielnie, może wykonać wszystkie obliczenia?

Zadanie 26

Z jednego punktu wyruszają w tym samym kierunku trzy ciała z prędkościami odpowiednio równymi $20 \frac{km}{h}$, $40 \frac{km}{h}$, $60 \frac{km}{h}$. Drugie ciało rozpoczyna ruch o 2 godziny później niż pierwsze. Po jakim czasie od chwili rozpoczęcia ruchu przez drugie ciało powinno wyruszyć trzecie ciało, aby dogonić pierwsze ciało równocześnie z drugim.

Zadanie 27

Odległość między miastami A i B wynosi 540 km. Pociąg ekspresowy pokonuje tę odległość w czasie o trzy godziny krótszym niż pociąg osobowy. Szybkość ekspresu jest większa od szybkości pociągu

osobowego o $30 \frac{km}{h}$. Oblicz średnie szybkości obu pociągów.

Zadanie 28

Samochód przebył w pewnym czasie 210 km. Gdyby jechał ze średnią prędkością o $10 \frac{km}{h}$ większą, to czas przejazdu skróciłby się o pół godziny. Oblicz, z jaką średnią prędkością jechał ten samochód.

Zadanie 29

Dwa pociągi towarowe wyjechały z miast A i B oddległych od siebie o 540 km. Pociąg jadący z miasta A do miasta B wyjechał o godzinę wcześniej niż pociąg jadący z miasta B do miasta A i jechał z prędkością o $9 \frac{km}{h}$ mniejszą. Pociągi te minęły się w połowie drogi. Oblicz z jakimi prędkościami jechały te pociągi.

Zadanie 30

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{1}{x+1} - 1$ dla wszystkich liczb rzeczywistych $x \neq -1$. Rozwiąż nierówność $f(x) > f(2-x)$.