

Ciągi

Zadanie 1

Oblicz sześć początkowych wyrazów ciągu, którego wyraz ogólny wyraża się wzorem:

- a) $a_n = \frac{n^2+2n+1}{n}$,
- b) $b_n = 1 - \frac{1}{10^n}$,
- c) $c_n = (-1)^n \cdot \frac{3-n}{n}$,
- d) $c_n = \frac{n^2}{n+2}$.

Zadanie 2

Pierwsze trzy wyrazy ciągu (a_n) to 2, 3, 5. Podaj wyrazy a_4, a_5, a_6 , jeśli:

- a) wzór ogólny tego ciągu to $a_n = \frac{1}{2}(n^2 - n + 4)$,
- b) wzór ogólny tego ciągu to $a_n = 2^{n-1} + 1$,
- c) jest to ciąg kolejnych liczb pierwszych,
- d) w ciągu tym każdy wyraz a_n dla $n \geq 3$ jest sumą dwóch poprzednich wyrazów.

Zadanie 3

Które wyrazy ciągu (a_n) są ujemne?

- a) $a_n = 2n^2 - 21n + 10$
- b) $a_n = 3n^2 - 10n + 8$
- c) $a_n = -2n^3 + n^2$

Zadanie 4

Wypisz sześć początkowych wyrazów ciągu (a_n) .

- a) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = na_n - 1, n \geq 1 \end{cases}$
- b) $\begin{cases} a_1 = 32, a_2 = 64 \\ a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}, n \geq 1 \end{cases}$
- c) $\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 1 \\ a_{n+2} = (-1)^n a_n - a_{n+1}, n \geq 1 \end{cases}$
- d) $\begin{cases} a_1 = a_2 = a_3 = 1 \\ a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n, n \geq 1 \end{cases}$

Zadanie 5

Które wyrazy ciągu (a_n) są równe zero?

- a) $a_n = n^2 - 5n - 6$
- b) $a_n = \frac{n^2-30n+200}{n^2+n-1}$
- c) $a_n = n^2 - n - 20$

Zadanie 6

Które wyrazy ciągu (a_n) , (b_n) i (c_n) są równe liczbie: 1, -2, 0, jeśli:

$$a_n = \frac{n}{2}, b_n = 3n - 5, c_n = n - n^2?$$

Zadanie 7

Oblicz wyrazy a_3, a_6, a_9 i a_{12} ciągu $a_n = \frac{n(n+1)}{(n+2)}$.

Zadanie 8

Oblicz wyrazy a_4 i a_8 ciągu o wyrazie ogólnym:

- a) $a_n = 2n! - 3$
- b) $a_n = 3n! - 3(n-1)!$
- c) $a_n = \frac{(2n)!}{(n+3)!}$

Zadanie 9

Oblicz wyrazy a_1, a_2, a_3 i a_8 ciągu

$a_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$. Uzasadnij, że każdy wyraz tego ciągu jest liczbą naturalną.

Zadanie 10

Oblicz wyrazy a_5 i a_6 ciągu o wyrazie ogólnym:

- a) $a_n = n! - 1$
- b) $a_n = n! - (n-1)!$
- c) $a_n = \frac{(2n)!}{(n+3)!}$

Zadanie 11

a) Wykaż, że jeśli (x_n) jest ciągiem rosnącym, $c > 0$ i $d \in \mathbb{R}$, to ciąg określony wzorem ogólnym

$y_n = c \cdot x_n + d$ jest rosnący.

b) Wykaż, że jeśli (x_n) jest ciągiem malejącym, $c < 0$ i $d \in \mathbb{R}$, to ciąg określony wzorem ogólnym $y_n = c \cdot x_n + d$ jest rosnący.

Zadanie 12

Wykaż, że suma ciągów:

- a) rosnących jest ciągiem rosnącym,
- b) malejących jest ciągiem malejącym.

Zadanie 13

a) Dla jakich wartości parametru p ciąg o wzorze ogólnym $a_n = \frac{p \cdot n}{n+1}$ jest rosnący?

b) Dla jakich wartości parametru $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$ ciąg określony wzorem ogólnym $a_n = ntg\alpha + 1$ jest malejący?

Zadanie 14

Zbadaj, które z określonych niżej ciągów są ciągami

arytmetycznymi. Jaki jest pierwszy wyraz, a jaka różnica?

- a) $a_n = \frac{3n-1}{2}$,
- b) $a_n = n^2 + 1$,
- c) $a_n = \frac{2n}{n+1}$,
- d) $a_n = 5n + 3$,
- e) $a_n = \sqrt{3} - \frac{1}{3}n$,
- f) $a_n = -n + 1$.

Zadanie 15

Wyznacz ciąg arytmetyczny (a_n) mając dane:

- a) $a_5 = 19$ i $a_9 = 35$,
- b) $a_4 = 11$ i $a_{10} = 29$,
- c) $a_3 = 15$ i $a_7 = 31$
- d) $a_6 = 4$ i $a_{16} = 10$
- e) $a_4 = -13b$ i $a_{10} = -43b$, gdzie $b \in \mathbb{R}$.

Zadanie 16

Trzeci wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 0. Oblicz S_5 .

Zadanie 17

Oblicz pierwszy wyraz i różnicę ciągu arytmetycznego (a_n) spełniającego podane warunki:

- a) $\begin{cases} a_2 + a_4 = 22 \\ \frac{a_1}{a_5} = 21 \end{cases}$
- b) $\begin{cases} a_2^2 + a_4^2 = 16 \\ a_3 + a_5 = 8 \end{cases}$
- c) $\begin{cases} a_2 \cdot a_7 = -1 \\ \frac{a_5}{a_1} = -1 \end{cases}$

Zadanie 18

a) Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Wykaż, że ciąg (x_n) określony wzorem $x_n = f(n+1) - f(n)$ jest arytmetyczny.

b) Wykaż, że dla dowolnej funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ ciąg (x_n) określony wzorem $x_n = f(n+1) - f(n)$ jest arytmetyczny.

Zadanie 19

a) Ciąg arytmetyczny składa się z 20 wyrazów. Suma wyrazów o numerach parzystych jest równa 250, a suma wyrazów o numerach nieparzystych 220.

Oblicz dwa środkowe wyrazy ciągu.

b) Siódmy wyraz ciągu arytmetycznego wynosi 11, a suma piętnastu pierwszych wyrazów jest równa 210. Który wyraz ciągu jest równy 26?

c) Szósty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 0. Oblicz sumę jedenastu początkowych wyrazów

tego ciągu.

d) Oblicz sumę jedenastu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego o numerach nieparzystych, jeżeli jedenasty wyraz tego ciągu jest równy 20.

Zadanie 20

Zbadaj, które z określonych niżej ciągów są ciągami geometrycznymi. Oblicz pierwszy wyraz oraz iloraz?

- a) $a_n = 2^n$,
- b) $a_n = n^2$,
- c) $a_n = \frac{3}{4^n}$,
- d) $a_n = 4n - 5$,
- e) $a_n = \frac{n}{n-1}$,
- f) $a_n = -2n + 1$.

Zadanie 21

Wyznacz ciąg geometryczny (a_n) mając dane:

- a) $a_1 = -3$ i $q = 0,5$
- b) $a_1 = 2$ i $q = -0,3$
- c) $a_1 = 0,7$ i $q = 2$
- d) $a_3 = -4$ i $a_4 = 0,25$
- e) $a_2 = 9,1$ i $a_3 = 2,6$
- f) $a_6 = \frac{5}{3}$ i $a_8 = \frac{5}{48}$

Zadanie 22

Oblicz a_1 i q , jeśli wiadomo, że $a_1 + a_3 + a_5 = 21$ i $a_3 - a_1 = 3$.

Zadanie 23

Wykaż, że liczby $a = 3 - 2\sqrt{2}$, $b = 10 - 7\sqrt{2}$, $c = 34 - 24\sqrt{2}$ są trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.

Zadanie 24

Wyznacz wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) , jeśli:

- a) $\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_4 = -\frac{1}{64} \end{cases}$
- b) $\begin{cases} a_1 \cdot a_5 = 1 \\ \frac{a_2}{a_3} = 5 \end{cases}$
- c) $\begin{cases} a_2 \cdot a_4 = 1 \\ a_2^2 + a_3^2 = 5 \end{cases}$

Zadanie 25

Liczby a, b, c, d są kolejnymi wyrazami malejącego ciągu geometrycznego. Suma dwóch liczb środkowych jest równa 24, a suma dwóch liczb skrajnych jest równa 36. Znajdź te liczby.

Zadanie 26

Krótsza przyprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 1. Jakie są długości pozostałych boków, jeśli długości wszystkich boków tworzą ciąg:

- a) arytmetyczny,
b) geometryczny.

Zadanie 27

a) Trzy liczby, których suma jest równa 21, tworzą ciąg arytmetyczny. Jeśli od drugiej z nich odejmiemy 1 a do trzeciej dodamy 6, to otrzymamy ciąg geometryczny. Jakie to liczby?

b) Liczby a, b, c są trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, a liczby $a + 1, b + 2, c + 6$ - trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Znajdź liczby a, b, c , wiedząc, że ich suma jest równa 12.

Zadanie 28

a) Między liczby 5 i 30 wstaw dwie takie liczby, aby trzy pierwsze tworzyły ciąg geometryczny, a trzy ostatnie ciąg arytmetyczny.

b) Między liczby -4 i 32 wstaw dwie takie liczby, aby trzy pierwsze tworzyły ciąg arytmetyczny, a trzy ostatnie ciąg geometryczny.

Zadanie 29

Mając dane liczby -4 i 50 , wyznacz takie liczby x, y , aby liczby $-4, x, y$ były trzema początkowymi kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, zaś liczby: $x, y, 50$ były trzema początkowymi kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.

Zadanie 30

Liczby a, b, c są trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, zaś liczby $a + 1, b + 4, c + 19$ trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Suma liczb a, b, c jest równa 15. Znajdź je.

Zadanie 31

Wykaż, że liczba 0 jest granicą ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym:

a) $a_n = \frac{2}{n}$

b) $a_n = \frac{3}{n+1}$

Zadanie 32

Oblicz granicę ciągu:

a) $a_n = \frac{7-3n}{n+1}$

b) $a_n = 2 - \frac{n+1}{n+2}$

c) $a_n = \frac{2n-1}{n+3} - \frac{1}{3}$

d) $a_n = \frac{2n^2+5}{n^2}$

e) $a_n = \frac{n^2+n-2}{n^3-n+1}$

f) $a_n = \frac{2n^3+n^2+3}{n^2+4}$

g) $a_n = \frac{n^2+3n-1}{n+1}$

h) $a_n = \frac{3-n-n^2}{n^2+3n}$

i) $a_n = \frac{(n+1)(n-3)}{(n+2)(n+3)}$

j) $a_n = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2-n+5}$

k) $a_n = n + 1 - \frac{1}{n^2+3}$

l) $a_n = \frac{n}{n^2+1} + n + 2$

m) $a_n = \frac{2+4+6+\dots+2n}{n^2}$

n) $a_n = \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2+2n+5}$

o) $a_n = \sqrt{n^2-1} - \sqrt{n^2-2}$

p) $a_n = \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{n(n+1)}$

r) $a_n = 3n - \sqrt{9n^2+6n-5}$

s) $a_n = \sqrt{4n^2+n} - 2n$

Zadanie 33

Oblicz sumę szeregu geometrycznego:

a) $4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \dots$

b) $9 - 3 + 1 - \frac{1}{3} + \dots$

c) $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \dots$

d) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots$

e) $0,2 + 0,02 + 0,002 + \dots$

f) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{8}} + \dots$

Zadanie 34

Suma nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) jest równa S , a iloraz q . Oblicz trzeci wyraz, jeżeli:

a) $S = 100, q = \frac{1}{4}$

b) $S = 2, q = \frac{1}{3}$

c) $S = 2\frac{1}{4}, q = -\frac{1}{3}$

d) $S = -10, q = \frac{4}{5}$

e) $S = \frac{10}{3}, q = -\frac{1}{10}$

f) $S = \frac{9}{110}, q = \frac{1}{100}$

Zadanie 35

Dla jakich wartości x istnieje suma szeregu geometrycznego zbieżnego? Oblicz sumę, jeżeli:

a) $x + 4x^2 + 16x^3 + 64x^4 + \dots$

b) $1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots$

c) $1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \dots$

d) $1 + (1+x)^2 + (1+x)^4 + (1+x)^6 + \dots$

e) $1 + (2-x^2) + (2-x^2)^2 + (2-x^2)^3 + \dots$

f) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^4} + \dots$

Zadanie 36

Rozwiąż równania i nierówności, w których lewa strona jest sumą nieskończonego ciągu geometrycznego:

a) $1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots = 3$

b) $2x + 4 + \frac{8}{x} + \frac{16}{x^2} + \dots = 18$

c) $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{8} + \dots > \frac{3x+1}{3}$

d) $1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + \dots = \frac{4x^2 - 5x - x^3 - 4}{x^2 - 4}$

e) $2x + \frac{4x^2}{3} + \frac{8x^3}{9} + \frac{16x^4}{27} + \dots \leq \frac{9}{4x}$

f) $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)^3} + \dots = 1 - 2x$